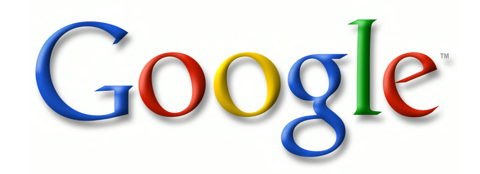


Die [illegible] ten.

Herausgegeben von [redacted]zig.

8. In Leinen gebunden.

Erschienen sind:

Nr. 1. **H. Helmholtz**, Erhaltung der Kraft. (1847.) (60 S.) 80 *Pf*.
» 2. **C. F. Gauss**, Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte. (1840.) Herausg. von A. Wangerin. (60 S.) 80 *Pf*.
» 3. **J. Dalton** u. **W. H. Wollaston**, Abhandlungen zur Atomtheorie. (1803—1808). Herausg. v. W. Ostwald. Mit 1 Taf. (30 S.) 50 *Pf*.
» 4. **Gay-Lussac**, Jod. (1814.) Herausg. v. W. Ostwald. (52 S.) 80 *Pf*.
» 5. **C. F. Gauss**, Flächentheorie. (1827.) Deutsch herausg. v. A. Wangerin. (62 S.) 80 *Pf*.
» 6. **E. H. Weber**, Über die Anwendung der Wellenlehre auf die Lehre vom Kreislaufe des Blutes etc. (1850.) Herausg. v. M. v. Frey. Mit 1 Taf. (46 S.) *M* 1.—.
» 7. **F. W. Bessel**, Länge d. einfachen Secundenpendels. Herausg. von H. Bruns. Mit 2 Taf. (171 S.) *M* 3.—.
» 8. **A. Avogadro** u. **Ampère**, Abhandlungen zur Molekulartheorie. (1811 u. 1814.) Mit 3 Taf. Herausg. v. W. Ostwald. (50 S.) *M* 1.20.
» 9. **H. Hess**, Thermochemische Untersuchungen. (1839—1842.) Herausg. v. W. Ostwald. (102 S.) *M* 1.60.
» 10. **F. Neumann**, D. mathem. Gesetze d. inducirten elektrischen Ströme. (1845.) Herausg. v. C. Neumann. (96 S.) *M* 1.50.
» 11. **Galileo Galilei**, Unterredungen u. mathematische Demonstrationen über zwei neue Wissenszweige etc. (1638.) 1. Tag mit 13 u. 2 Tag mit 26 Fig. im Text. Aus d. Italien. übers. u. herausg. v. A. v. Oettingen. (142 S.) *M* 3.—.
» 12. **I. Kant**, Theorie d. Himmels. (1755.) Herausg. v. H. Ebert. (101 S.) *M* 1.50.
» 13. **Coulomb**, 4 Abhandlgen über d. Elektricität u. d. Magnetismus. (1785-1786.) Übers. u. herausg. v. W. König. Mit 14 Textf. (88 S.) *M* 1 80.
» 14. **C. F. Gauss**, D. 4 Beweise d. Zerlegung ganzer algebr. Functionen etc. (1799—1849.) Herausg. v. E. Netto. (81 S.) *M* 1.50.
» 15. **Théod. de Saussure**, Chem Untersuch. üb. d. Vegetation. (1804.) 1. Hälfte. Mit 1 Taf. Übers. v. A. Wieler. (96 S.) *M* 1.80.
» 16. —— —— 2. Hälfte. Übers. v. A. Wieler. (113 S.) *M* 1.80.
» 17. **A. Bravais**, Abhandlgen üb. symmetr. Polyeder. (1849.) Übers. u. in Gemeinschaft mit P. Groth herausg. von C. u. E. Blasius. Mit 1 Taf. (50 S.) *M* 1.—.
» 18. Die Absonderung d. Speichels. Abhandlungen v. **C. Ludwig**, **E. Becher** u. **C. Rahn.** Herausg. v. M. v. Frey. Mit 6 Textfig. (43 S.) *M* —.75.
» 19. Üb. d. Anziehung homogener Ellipsoide. Abhandlungen von **Laplace** (1782), **Ivory** (1809), **Gauss** (1813), **Chasles** (1838) und **Dirichlet** (1839). Herausg. von A. Wangerin. (118 S.) *M* 2.—.
» 20. **Chr. Huyghens**, Abhandlung üb. d. Licht. Herausg. von E. Lommel. Mit 57 Textfig. (115 S.) *M* 2.40.
» 21. **W. Hittorf**, Abhandlgen über d. Wanderungen der Jonen während der Elektrolyse. (1853—1859.) I. Theil. Mit 1 Taf. Herausg. von W. Ostwald. (87 S.) *M* 1.60.
» 22. **Woehler** u. **Liebig**, Unters. über d. Radikal d. Benzoesäure. (1832.) Herausg. von Herm. Kopp. Mit 1 Taf. (43 S.) *M* 1.—.

Fortsetzung auf der dritten Seite des Umschlages.

LAMBERT'S

PHOTOMETRIE.

(PHOTOMETRIA SIVE DE MENSURA ET GRADIBUS LUMINIS, COLORUM ET UMBRAE).

(1760.)

Deutsch herausgegeben

von

E. Anding.

Erstes Heft:

Theil I und II.

Mit 35 Figuren im Text.

LEIPZIG

VERLAG VON WILHELM ENGELMANN

1892.

Photometria

sive

de mensura et gradibus luminis, colorum et umbrae.

Erster Theil.

Das directe Licht.

Seine verschiedenen Erscheinungen und seine Intensität.
Helligkeit und Beleuchtung.

Kapitel I.

Tendenz des Unternehmens. Grundbegriffe und Principien der Photometrie.

[1] 1. Es scheint das allgemeine Schicksal der menschlichen Erkenntnisse zu sein, dass gerade dasjenige unserer Einsicht am meisten verschlossen ist, was der sinnlichen Wahrnehmung fortwährend begegnet. Für diese Behauptung stellt die Theorie des Lichtes ein ausgezeichnetes Beispiel dar. [2] Denn bei Untersuchungen über das Wesen und die Natur desselben begegnet man so vielen und so gewichtigen kaum überwindbaren Schwierigkeiten, dass wunderbarer Weise unsere Kenntniss gerade in Bezug auf denjenigen Gegenstand, welcher der Quell der Erleuchtung ist, von grosser Finsterniss umhüllt wird und dass gerade über das Licht soviel Dunkelheit herrscht. Und dass überhaupt auf dem Gebiete der Physik der Weg von den Wirkungen zu den dem Auge nicht zugänglichen Ursachen steil, wenn nicht geradezu unpassirbar ist, dies ist so gewiss, dass man nicht einmal einen Schritt thun kann, ohne auf entsprechende Beispiele zu stossen.

2. Da es nun gerade diese Schwierigkeiten sind, welche sich beim Nachdenken zuerst darbieten, so halte ich es auch für richtig, mit ihnen diese gegenwärtige Theorie der Messung des Lichts zu beginnen. Es fehlt nämlich, wie es scheint, gänzlich

oder wenigstens zumeist, an Stützpunkten, welche sonst geeignet sind, die Aufsuchung der Wahrheit zu fördern und die Eigenschaften der Grössen zu durchforschen. Es fehlt an einer physikalischen Theorie des Lichts, welche streng bewiesen und auf Schlüsse aufgebaut wäre. Es fehlen die Instrumente, um das Licht zu messen. Es fehlen endlich die ersten Principien, aus denen man das übrige ableiten könnte. Und ein Umstand, welcher dem Mathematiker nicht weniger Mühe macht, als alles bisher genannte, besteht darin, dass er sich nicht genug vor logischen Cirkelschlüssen in Acht nehmen kann, wenn er die einzelnen Ergebnisse mit einander verknüpfen und einem jeden den gebührenden Platz anweisen will.

3. Damit es aber nicht scheint, als ob ich die vorgebrachten Hindernisse mehr, als billig ist, aufbausche, muss ich dieselben mit gerechter Wage genau abwägen. Dass die Theorie des Lichts, soweit sie bis jetzt ausgebildet ist, unserem Ziel nicht genügt, folgt schon leicht aus dem Umstand, dass es zweifelhaft ist, welches unter den bisher über das Licht aufgestellten Systemen [**3**] vorzuziehen sei, wenn man nur Bewiesenes zulassen will. Denn wenn auch, um anderes zu übergehen, die Vorstellungen, welche sich so scharfsinnige Männer wie *Newton* und *Euler* gemacht haben, zur Erklärung der meisten Erscheinungen angewandt werden können, und wenn die *Euler*'sche Hypothese mit der Natur der Sache am meisten in Einklang zu stehen scheint, so lässt sich doch bedauerlicher Weise noch keine von beiden als Princip verwenden, welches zur Auffindung neuer Erscheinungen führen könnte. Und wenn sie dies auch leisten würden, so sieht man doch bei der Messung des Lichts nicht wenig Fälle, in welchen keineswegs feststeht, wie sie sich an die eine oder die andere Hypothese anschliessen lassen. Einige derselben hat gewiss schon *Newton* erkannt, aber er liess sie, von der Schwierigkeit abgeschreckt, im Ungewissen und versuchte nicht einmal durch Experimente etwas zu erreichen, da er sah, dass ihn die Theorie ganz im Stich lassen werde.

4. Es ist jedoch nicht meine Absicht, hierdurch die Anwendbarkeit und den Werth der Hypothesen zu schmälern. Denn wenn es auch noch nicht möglich ist, allem, was zu einem gewissen System gehört, seine natürliche Stellung anzuweisen, so halte ich es doch für nützlich und erforderlich, sich eines erdachten Systemes zu bedienen, um nach Möglichkeit Verwirrung und Dunkelheit zu vermeiden. Dazu kommt, dass manchmal eine anfangs für falsch gehaltene Hypothese bei aufmerksamerer

Prüfung allmählich von den Fehlern befreit und als Wahrheit oder als zur Wahrheit geworden erkannt wird. Auf diese Weise wird bekanntlich das Weltsystem täglich immer mehr in Klarheit gestellt. [4] Und in ähnlicher Weise wird ohne Zweifel auch die *Euler*'sche Theorie des Lichts ausgefeilt werden, wenn sie auch scheinbar jetzt noch nicht genügt, um alle Erscheinungen zu erklären. Denn unter die vornehmsten und sichersten Kriterien dafür, dass eine Hypothese sich der Wahrheit nähert, muss man den Fall rechnen, wenn man aus dem Lehrgebäude derselben den Eintritt neuer Erscheinungen vorhersehen und wenn man Sätze daraus folgern kann, denen die zu diesem Zweck angestellten Versuche beipflichten. Unter den bisherigen Hypothesen über die Natur des Lichtes sehe ich aber keine, welche diese Prüfung bestanden hätte; denn man hat gerade genug zu thun, um das einzelne an schon bekannte Erscheinungen anzuschliessen.

5. Diese Mängel, an welchen die physikalische Theorie des Lichtes so sehr leidet, sind allerdings bedeutsam genug, um sich unvermeidlich zum grossen Theil auch in die Photometrie einzuschleichen; sie sind jedoch, wenn man genau zusieht, in dieser Beziehung von viel geringerem Gewicht. Denn die Photometrie handelt nicht von dem Wesen des Lichts, welches den Sinnen ganz verborgen ist, sondern sie misst dessen Menge, Helligkeit und andere Wirkungen, welche den Sinnen fortwährend begegnen. Es ist aber schon längst bekannt und wird durch das Beispiel der Schwerkraft klar bewiesen, dass die mathematische Kenntniss der Gegenstände und Vorgänge in der Natur von der physikalischen nur in geringem Grade abhängig ist und dass jene mit raschem Schritt gefördert und in wunderbarer Weise erweitert werden kann, wenn auch diese sich immer in engen Schranken hält.

6. Doch glaube ich nicht, dass die Photometrie deshalb mit der Theorie der Schwere und der Bewegung der schweren Körper gleichen Schritt halten werde. Denn, wie oben schon erwähnt, hat man keine Instrumente, [5] mit welchen man in jedem gegebenen Fall die Intensität des Lichts messen und deren man sich anstatt der Wage oder des Maassstabes bedienen könnte. Denn wenn man unten auch verschiedene photometrische Instrumente wird beschrieben finden, so können sie doch nur insofern Anwendung finden, als man mit ihrer Hilfe die Helligkeit des Lichts und der Farben in einem gegebenen Verhältniss zu vergrössern und zu verkleinern im Stande ist, bis sie einer gegebenen Helligkeit dem

Urtheil des Auges zufolge merklich gleich ist. Offenbar ist also die Photometrie noch immer mit derselben Schwierigkeit behaftet, welche vor Erfindung des Thermometers einer genaueren Messung der Wärme entgegenstand. Es wäre also zu wünschen, dass ähnlich wie ein Thermometer so auch ein *Photometer* erfunden würde, welches, dem Licht ausgesetzt, dessen Intensität und Helligkeit anzeigen würde. Allerdings bietet uns hierfür das Auge selbst ein Beispiel, indem die Oeffnung der Pupille der Grösse und Helligkeit des Lichts nachfolgt und sich beiden anpasst. Aber es ist sehr zu bezweifeln, dass die Technik hierin die Natur nachahmen könne. Denn man wird kaum eine Substanz erzeugen können von solcher Empfindlichkeit, wie die Fibrillen des Auges, und welche der Bewegung des Lichts auch dann noch nachgiebt, wenn dessen Helligkeit sehr klein ist. Ich weiss sehr wohl, dass mehrfach zu diesem Zweck Experimente angestellt worden sind, um zu zeigen, dass die Bewegung des Lichts beobachtet werden könne, nämlich wenn Sand oder eine Stahlplatte in den Brennpunkt einer Convexlinse oder eines Brennspiegels gebracht und von der Wucht der Sonnenstrahlung in Bewegung gesetzt wird. Denn es ist sehr fraglich, ob dieser Erfolg dem Licht oder der Wärme zuzuschreiben ist; und selbst wenn man zugiebt, dass er allein vom Licht herrühre, so bleibt doch, da eine so enorme Dichtigkeit der Strahlen erforderlich ist, wenig Hoffnung, dass derselbe Erfolg eintritt, wenn man ein viel schwächeres Licht messen will. [6] Was aber das Sonnenlicht betrifft, so kann unter der Voraussetzung, dass dessen Wärme sich in derselben Weise verringert und vermehrt, wie die Dichtigkeit der Strahlen, jedenfalls das Thermometer die Stelle eines Photometers vertreten. Aber der Gebrauch desselben ist in zu enge Grenzen eingeschränkt. Denn wie wollte man mit einem Thermometer die Helligkeit des Mondlichtes bestimmen?

7. Da nun also bei der Bestimmung der Lichtstärken das Auge alleiniger Richter ist, so sind auch die Hindernisse zu besprechen, infolge deren wir uns auf das Urtheil desselben nicht genau verlassen dürfen. Offenbar bringt gerade die schon erwähnte Veränderung der Oeffnung der Pupille in unser Urtheil über die Helligkeit des Lichts eine Unsicherheit. Denn ein Licht wird um so heller erscheinen, je grösser diese Oeffnung ist und in je ausgedehnterem Maasse hierdurch das Licht in das Auge eintreten kann. Dadurch kann es kommen, dass ein helleres Licht uns nicht so hell erscheint, wie es bei derselben Oeffnung der Pupille sein würde. Hierher gehört auch die Gewohnheit,

dass sich das Auge allmählich sogar der nächtlichen Dunkelheit anpassen kann, wie man an Leuten beobachtet, welche in dunkle Gefängnisse eingeschlossen sind und dennoch die einzelnen Gegenstände unterscheiden können. Denn allmählich kehrt bei ihnen die schärfere Empfindlichkeit der Nerven, welche durch das hellere Licht abgeschwächt war, wieder zurück. Dieselbe Ursache macht auch die Morgendämmerung scheinbar viel heller als die Abenddämmerung, indem die Schärfe der Augen bei Tage beträchtlich abgestumpft wird.

8. Diese beiden Täuschungen, welche das Urtheil des Auges über die Helligkeit unsicher machen, bringen zugleich noch einen anderen Nachtheil mit sich. Wollte man nämlich die Urtheilsfähigkeit des Auges schärfer untersuchen, so müsste man [7] auf diese Täuschungen Rücksicht nehmen und dieselben in Rechnung ziehen, um dadurch die übrigen Principien der Photometrie auf festeren Boden stellen zu können. Aber bei einer näheren Betrachtung leuchtet ein, dass man gerade diese Principien schon braucht, wenn man den Fehler, welcher im Urtheil des Auges liegt, bestimmen will. Deshalb vermag ich nicht einzusehen, wie ein logischer Cirkel vermieden werden kann, wenn man eine Photometrie verlangt, die vollständig mit aller Strenge bewiesen sein soll. Geht man aber von dieser Strenge ein wenig ab, so giebt es ein Mittel, die Sätze der Photometrie so zu verknüpfen, dass sie die ihnen entsprechende Sicherheit sehr wohl erhalten.

9. Ehe wir aber hierzu übergehen, wird es gut sein, das Urtheil des Auges genauer zu betrachten und dasselbe mit dem Urtheil der übrigen Sinne, insbesondere des Gehörs und des Wärmesinnes zu vergleichen. Das erstere verlangt die Photometrie selbst, eben weil sie sich auf das Urtheil des Auges stützt. Dagegen soll die jetzt vorzunehmende Prüfung die daraus gefolgerten Ergebnisse nicht nur beleuchten, sondern auch verallgemeinern.

10. Der Wärmesinn betrügt unser Urtheil in stärkerem Maasse, als das Gesicht und das Gehör, wenn man dabei die Intensität der Wärme, des Lichts und des Schalles ins Auge fasst. Denn der Spielraum, innerhalb dessen wir Wärme und Kälte ertragen können, ist durch weit engere Grenzen beschränkt, als beim Licht und beim Schall. Denn das Licht erhebt sich von kimmerischer Finsterniss auf unendlich vielen Stufen bis zum erhabensten Glanz der Sonne, und diese alle kann das Auge wahrnehmen. Auch das Ohr kann bekanntlich

ähnlich viele Abstufungen der Töne unterscheiden. Viel leichter verführt uns aber der Wärmesinn, dieselbe Temperatur der Luft für kalt zu halten, [8] welche uns zu einer anderen Zeit, auch wenn sie sich nicht geändert hat, als warm erscheint; und man musste auf das Thermometer warten, bis man sich überzeugen liess, dass tiefe Schachte im Winter und Sommer dieselbe Temperatur haben und dass sich dieselbe dort niemals ändert.

11. Durch die Erfindung des Thermometers ist unser Urtheil über Wärme und Kälte weit sicherer geworden, und es liegt nun in unserer Hand, unabhängig vom Urtheil der Sinne, éinen beliebigen Wärmegrad hervorzubringen, welcher einem gegebenen gleich sein soll. Ein ähnlicher, aber nicht gleicher, Vortheil steht auch dem Gehörssinn zu Gebote, indem man mit Hilfe der Musikinstrumente, besonders der Blasinstrumente und der Orgel, einen beliebigen Ton jederzeit wieder hervorrufen kann. Sobald man aber anderweitig einen ähnlichen Ton hervorbringen will, muss man das Ohr als Richter benutzen, da nur in wenigen Fällen die Theorie Hilfe leistet. Eine solche Hilfe erfährt aber das Auge noch weit weniger. Denn wenn man auch die verschiedenen Arten von Licht gleichsam aus der Finsterniss erwecken kann, je nachdem man verschiedene leuchtende Substanzen entzündet, so ist doch eine solche Helligkeit nicht constant und kann auch nicht festgehalten und wieder hervorgebracht werden wie der Ton der Blasinstrumente. *Dem Auge stehen also keine solchen Instrumente zu Gebote, wie das Thermometer und die Orgel, und dasselbe ist, um sich ein Urtheil zu bilden, auf sich selbst angewiesen.* Dass mit Hilfe des elektrischen Funkens eine constante Helligkeitsstufe hervorgebracht werden könne, sodass das Auge in derselben Weise unterstützt würde, wie das Ohr, muss ich sehr bezweifeln.

12. Das Thermometer entscheidet hinsichtlich der Wärme nur den Grad, sofern derselbe stärker oder schwächer ist. Dasselbe gilt auch hinsichtlich des Wärme*sinnes*; jedoch besteht zwischen dem Urtheil beider ein grosser Unterschied. Denn während das Thermometer im Wasser wie in der Luft denselben Wärme- oder Kältegrad anzeigt, [9] empfindet die Hand das Wasser bald kälter bald wärmer als die Luft. Dagegen können das Licht sowohl wie der Schall nicht nur an Grad, sondern auch an Art verschieden sein. Das Licht nämlich, indem es sich in die vielfältigen Farben spaltet, die einzeln wieder bald heller, bald dunkler sein können, je nachdem sie durch mehr oder weniger Licht erleuchtet werden. Dieselbe

Verschiedenheit besteht auch bezüglich der Töne. Wie aber das Ohr eine Dissonanz leichter herausfindet, als die Intensität und Stärke desselben Tones, so vermag auch das Auge die Verschiedenheit zwischen den mannigfaltigen Farben leichter zu erkennen, als die Intensitäten derselben Farbe. Denn die Art der Farbe hängt von der Oeffnung der Pupille nicht in der Weise ab, wie der Grad der Helligkeit. Hierbei sind aber nur sehr kleine Unterschiede gemeint.

13. Wenn sich unser Körper an eine gewisse Temperatur gewöhnt hat und dieselbe sich dann ändert, so passt er sich allmählich auch der neuen Temperatur an. Dies beobachtet man besonders im Herbst, sobald von neuem Kälte eintritt. Um sich an diese zu gewöhnen, ist ein Zwischenraum von einigen Tagen erforderlich. Dagegen passt sich das Auge hinsichtlich der Oeffnung der Pupille anderen Helligkeitsstufen in wenigen Augenblicken an. Denn hinsichtlich der Bewegung der Fibrillen und des Sehnerven finden andere Verhältnisse statt, wie man ja auch, wenn man die Sonne lange angesehen hat, dann bei davon abgewendetem Auge deren Bild in anderen Farben weiter sieht. Diese Wirkung des Lichts auf die Sehnerven ist besonders dann auffällig, wenn das Licht, welches man angesehen hat, sehr hell ist. Etwas ähnliches beobachtet man auch hinsichtlich des Gehörs.

[10] 14. Insofern als zwischen den Farben des Spectrums und den Tonintervallen einer Octave eine harmonische Verwandtschaft besteht, behauptet das Auge den Vorrang über das Ohr. Denn eine jede Farbe kann man für sich und ohne Vergleichung mit anderen Farben wieder erkennen. Dagegen ist die Unterscheidung von Tönen ohne Hilfe von Instrumenten schwieriger, wenn man sich nicht lange daran gewöhnt hat. Denn einen Sänger, dessen Stimme man schon öfter gehört hat, kann man nach den Gehör leichter erkennen, als die Note, welche er singt.

15. Ferner scheint auch das allen Empfindungen gemeinsam zu sein, dass die stärkere die schwächere unterdrückt. So scheint eine Kerze im Sonnenschein gar keine Helligkeit zu besitzen; dagegen vermag sie das Licht, welches Nachts von faulendem Holze verbreitet wird, so unsichtbar zu machen, als ob es gar nicht vorhanden wäre. Also wird auch in dieser Hinsicht das Urtheil des Auges leicht fehlerhaft. Bei Tage sieht man ein in das Sonnenlicht gehaltenes Blatt Papier ungefähr ebenso hell, wie das Licht einer Kerze, während es bei Nacht, wenn es nur von der Kerze beschienen wird, weit dunkler ist. Dennoch

stehen in beiden Fällen dieselben Gegenstände zum Vergleich. Denn beide werden bei Tage von der Sonne beschienen, welche Nachts wieder von beiden abwesend ist.

16. Nachdem wir die wichtigsten Täuschungen des Auges besprochen haben, ist zu untersuchen, auf welche Weise man dieselben unschädlich machen kann. Vielleicht glaubt mancher, dass ich bei diesen Fehlerquellen allzulange stehen geblieben bin, als ob ich die Wissenschaft, welche ich hier vortragen will, ganz unsicher zu machen und ihre Grundlagen zusammenzureissen beabsichtigt hätte. [11] Aber ich hoffe, dass ein solches Unternehmen von billigen Richtern nicht getadelt wird, da ich es vermeiden will, solche Dinge für gewiss und unbestreitbar auszugeben, von denen ich selbst voraussehen konnte, dass sie des Beweises noch bedurften. Denn es ist in der Physik wichtig, die ersten Principien abzuwägen und die ersten Begriffe gut zu entwickeln, bevor man eilig zu solchen Sachen übergeht, die man ohne Weiteres daraus hervorgehen sieht. Was wirklich sicher ist, wird man eben auf diese Weise auch als sicher erkennen und es wird sich Anlass finden, das Zweifelhafte einer weiteren Prüfung zu unterwerfen. Es giebt in der Physik mehrere Dinge, die nicht mit mathematischer Strenge bewiesen werden können und doch ebenso sicher sind, wie die gewissesten. Es wird aber nützlich und nöthig sein, den Unterschied dieser zweifachen Sicherheit sich klar zu machen.

17. Die Photometrie sehen wir als den zweiten Theil der Optik an. Als ersten betrachten wir denjenigen, welcher von der fortschreitenden Bewegung des Lichts handelt, ebenso von deren verschiedenen Arten, Erscheinungen und Anwendungen. Die Behandlung dieses ersten Theiles können wir übergehen, da schon viele sehr gute Werke darüber vorliegen, und wir dürfen sogar alles voraussetzen, was dort über die Beschaffenheit des Auges, den Weg des Lichtes und die verschiedenen allgemein bekannten optischen Instrumente gelehrt und bewiesen wird. Dagegen muss man in diesem zweiten Theil, den wir als Photometrie bezeichnen, ganz von vorn beginnen und von der Helligkeit des Lichts, der Leuchtkraft desselben und den verschiedenen Arten der Farben und des Schattens reden. Denn wenn man auch bei den Schriftstellern der Optik allenthalben hierüber etwas findet, so muss man sich dies alles doch wieder vom ersten Anfang an [12] vergegenwärtigen, um den inneren Zusammenhang zu erkennen.

18. Diesen Erscheinungen des Lichts begegnet das Auge

fortwährend, sodass sich immer Gelegenheit bietet, Versuche darüber anzustellen; und deshalb habe ich auch geglaubt, die Photometrie der grösseren Sicherheit wegen auf Experimente aufbauen zu müssen. Denn die blosse Theorie ist, wie schon erwähnt, nicht im Stande, die einzelnen Schwierigkeiten zu lösen. Indessen werde ich dieselbe nicht etwa vollständig ausser Acht lassen, sondern ich werde auch von dieser Seite her Beweise zu bringen suchen, um das, was die Versuche lehren, wenn auch nicht zu beweisen, so doch plausibel zu machen und einer gewissen Prüfung zu unterwerfen. (4) Diese Beweise werde ich zumeist an beide Hypothesen über die Natur des Lichts anschliessen, die *Newton*'sche und die *Euler*'sche, da sich, unter Weglassung der übrigen, die Physiker bis heute noch nicht für die eine oder die andere einmüthig entschieden haben. Die erstere liegt dem Verständniss, die letztere vielleicht der Natur der Sache näher. Sie unterscheiden sich hauptsächlich durch die Vorstellung der Art, wie das Licht den leuchtenden Körpern entströmt und sich im Weltraum verbreitet. *Newton* nimmt an, dass die Lichtstrahlen in der That aus dem leuchtenden Körper ausströmen und gleichsam ausgestossen werden, sodass die Masse des Körpers auf diese Weise beständig abnimmt. *Euler* dagegen vertritt das von *Descartes* ersonnene und von *Huyghens* ausgebildete System, nachdem er es so umgestaltet hat, dass es für die meisten Erscheinungen, besonders die allmähliche Fortpflanzung des Lichts und dessen Uebergang in die verschiedenen Farben passt. Hierzu nimmt er an, dass das Licht dem Schall, die Lichtsubstanz der Luft, der leuchtende Körper dem tönenden, die Farben endlich den verschiedenen in der Musik gebräuchlichen Tönen und Tonintervallen entsprechen [13] und ähnlich seien. Die Bewegung des Lichts und des Schalles erklärt er als eine Wellenbewegung, vermöge deren sich ersteres durch den Aether, letzterer durch die Luft verbreitet, und jenes durch Spiegel, dieser durch Wände und ähnliche Hindernisse reflectirt wird. Vergl. dessen *Conjectura physica circa propagationem soni ac luminis.*

19. Einen so bedeutsamen Streit zwischen den grössten Männern schlichten zu wollen, ist noch nicht an der Zeit. Man begegnet in der That in der Photometrie nicht wenigen Versuchen, welchen man jedes dieser beiden Systeme leicht zu Grunde legen kann. Es giebt aber auch andere und zwar recht schwerwiegende, denen man keines derselben gut anpassen kann, und die als Prüfstein dienen werden, wenn man beide zur Rechenschaft zieht.

20. Um nun die ersten Grundlagen der Photometrie aufzu-

stellen, beginnen wir mit der alltäglichen und allgemein zugänglichen Erfahrnng, dass das Licht verschiedene Intensitäten besitzen kann, und dass es verschiedene Veränderungen erleidet, wodurch sich dessen Helligkeit und Art ändert. Hieraus ergeben sich die Grundbegriffe, die man genauer aufsuchen und gegenseitig unterscheiden muss.

21. So wird hoffentlich niemand leugnen, dass zwei Kerzen heller leuchten als eine einzige; dass durch die Annäherung der Lichtquelle die Helligkeit des Objectes vergrössert wird, dass schief einfallendes Licht eine schwächere Erleuchtung hervorbringt, dass eine Lichtquelle mehr oder weniger hell sein und doch dieselbe Grösse haben kann; dass die Helligkeit desselben Lichts ebenso bleibt oder etwas geändert wird, je nachdem das Auge dasselbe aus grösserer oder geringerer Entfernung anschaut.

22. Diese einzelnen Sätze werden durch die Erfahrung in der Weise bestätigt, dass über ihre Wahrheit kein Zweifel bleiben kann. Aber es ist wohl zu merken, [**14**] dass uns dies alles nur so *scheint*, und dass man hieraus noch nicht schliessen kann, dass es sich auch in der Sache so verhalte. Wenn man aber diesen Sprung zulässt, so kann man wenigstens den oben (8) erwähnten logischen Cirkel vermeiden. Verlangt man aber, dass die Principien der Photometrie regelrecht bewiesen werden, so muss man sich vor beidem hüten. Es ist also zu untersuchen, inwiefern die Täuschungen des Auges dessen Urtheil über diese Erfahrungen unsicher zu machen vermögen und auf welche Weise man dieser Unsicherheit entgegenwirken kann.

23. Wenn aber je in der Photometrie ein Axiom etwas gilt, so ist es gewiss das folgende, welches wir allem Anderen zu Grunde legen: *Eine Erscheinung ist dieselbe, so oft dasselbe Auge auf dieselbe Weise afficirt wird.* Lässt man dieses, da man über seine Wahrheit kaum zweifeln kann, zu, so werden sich, wie man sehen wird, hieraus die verschiedenen Sätze ergeben, mit deren Hilfe wir die vorher erwähnten Erfahrungen werden prüfen können.

24. Um nämlich sagen zu können, das Auge sei dasselbe, ist erforderlich, dass Zeit und Ort dieselben sind (7), ferner dass das Licht, welches in das Auge fällt, dieselbe Helligkeit und Grösse habe, da ja von beiden die Oeffnung der Pupille abhängig ist. Findet dies nicht statt, so wird das Urtheil des Auges über die Gleichheit des Lichts oder der Helligkeit nicht so sicher sein, dass nicht ein grösserer Grad der Sicherheit mit Recht erwünscht wäre.

25. In ähnlicher Weise ist, damit das Auge ebenso afficirt werde, erforderlich, dass Grösse, Distanz, Helligkeit und Stellung der betrachteten Gegenstände dieselben sind. Durch die Anwendung dieser Vorsichtsmaassregeln wird man dem Urtheil des Auges die denkbar grösste Sicherheit verleihen können. Denn wenn man auf diese Weise zwei oder mehrere Gegenstände anschaut [15] und die Helligkeit derselben als die gleiche findet, so wird dieses Urtheil sicher und richtig sein. Wenigstens muss man sehr bezweifeln, dass es hier noch eine grössere Sicherheit geben kann.

26. Da also das Urtheil des Auges richtig ist, wenn es sich auf die Gleichheit der Helligkeit zweier oder mehrerer nebeneinander stehender Gegenstände bezieht, so kann man auch auf sicherem Wege weiter gehen und die übrigen Fälle, welche verwickelter sind, auf diesen ersten und einfachsten reduciren. Dies wird eintreten, wenn sich die Hilfsmittel bieten, eine beliebige Helligkeit so zu vermehren oder zu vermindern, dass sie einer gegebenen Helligkeit gleich wird. Zuvor soll aber untersucht werden, inwiefern das Urtheil des Auges über die Ungleichheit der Helligkeit der Gegenstände richtig und zulässig ist.

27. Ein Auge möge zwei nebeneinander stehende leuchtende Gegenstände anschauen und dieselben ungleich hell finden. Dann werden wir unter Anwendung desselben Axioms (23) jedenfalls mit Sicherheit schliessen, dass entweder das Auge nicht in demselben Zustand ist, oder, wenn dies der Fall ist, dass es von beiden Gegenständen verschieden afficirt wird. Das Letztere kann man hinsichtlich der Lage, Grösse und Entfernung der Gegenstände verhüten, sodass allein der Unterschied der Helligkeit übrig bleibt. Wenn ein solcher da ist, so kann durch ihn die Oeffnung der Pupille dann und wann eine verschiedene werden. Stehen aber die Gegenstände einander so nahe, dass das Auge beide mit einem Blick übersieht, so ist klar, dass die Contraction der Pupille durch das Licht beider Gegenstände verursacht wird. Da also für beide die Oeffnung dieselbe ist, so erleiden die in das Auge einfallenden Strahlen bezüglich ihrer Menge keine Veränderung, und daher wird das Urtheil des Auges über die Verschiedenheit der Helligkeit jedenfalls richtig sein.

[16] 28. Ferner wollen wir, wie unten ausführlicher auseinandergesetzt werden wird, hier kurz bemerken, dass in diesen Fällen die Veränderung der Pupille die Wahrheit des Urtheils des Auges nicht beeinträchtigt. Es steht nämlich durch die Erfah-

rung fest, dass die Oeffnung der Pupille kleiner wird, wenn man ein Licht lebhafter anschaut. Es wird also den Lichtstrahlen der Zugang verschlossen und sie scheinen dadurch nicht so hell, als es sich gehört. Doch keineswegs wird derselbe in der Weise verschlossen, dass die Pupille um die Hälfte kleiner wird, wenn sich die Dichtigkeit des Lichts verdoppelt. Denn wenn dies stattfände, so würde man alle Gegenstände gleich hell *erblicken.* Dagegen sieht man vielmehr, dass Gegenstände, welche offenbar heller sind, durch das Urtheil des Auges auch heller gefunden werden. Dafür hat man ein sehr einleuchtendes Beispiel am Eisen, wenn es allmählich bis zur Weissgluth erhitzt wird.

29. Wenn daher hiernach offenbar ist, dass das Auge, wenn es zwei oder mehrere nebeneinanderstehende Gegenstände zugleich anschaut, dann ein richtiges Urtheil über die Helligkeit derselben fällen wird, wenn es entscheidet, ob dieselbe eine gleiche oder verschiedene ist, so ist es doch *nicht im Stande, bezüglich der Helligkeitsgrade ein anderes Verhältniss zu entscheiden, als eben das Verhältniss der Gleichheit.* Wenn aber die Helligkeitsgrade verschiedene sind, so lässt das Urtheil des Auges unentschieden, um wieviel der eine grösser ist als der andere. Man muss sich daher, da uns bis jetzt die Instrumente fehlen, anderer Hilfsmittel bedienen. Man muss vermöge derselben, wie schon erwähnt (6, 26), im Stande sein, die Helligkeit des einen oder des anderen Gegenstandes so zu vermehren oder zu vermindern, dass nicht nur die eine Helligkeit der anderen gleich wird, sondern dass man auch weiss, um wieviel diese Helligkeit vermehrt oder vermindert worden ist. Dass Gleichheit besteht, muss das Auge beurtheilen; wie viel aber die Helligkeit zugenommen oder abgenommen hat, dafür ist ein Maass aus den Principien der Photometrie zu ermitteln.

[**17**] 30. Wenn gesagt wurde, dass das Auge über die Beziehung der Gleichheit zweier Helligkeiten ein Urtheil fällen könne, so ist dies nicht so zu verstehen, als ob dieselben dann mit mathematischer Strenge und absolut gleich sein müssten. Man kann jedoch jedenfalls annehmen, dass dieser Gleichheit die Helligkeiten nahe kommen, wenn das Auge sie als gleich beurtheilt. Denn immer ist noch eine minimale Differenz da, welche sich der Schärfe des Auges entzieht. Es wird sich aber durch die unten vorkommenden Versuche zeigen, dass diese Differenz äusserst klein und in der Mehrzahl der Fälle vernachlässigbar ist.

31. Man wird aber dieses Urtheil des Auges auf eine zwei-

fache Art anwenden. Will man nämlich ein Gesetz, welches aus den Principien oder aus angenommenen Hypothesen gefolgert ist und welches die je nach den Umständen verschiedenen Lichtstärken nachweist, der Prüfung durch die Erfahrung unterwerfen, so genügt in diesem Fall das Urtheil des Auges gewiss, wenn es auch nur nahezu richtig ist. Denn man hat ja nur die Aufgabe, zu untersuchen, ob dieses Gesetz mit der Erfahrung stimmt oder nicht. Und in diesem Fall genügt es gewiss, wenn es im Rahmen der sinnlichen Empfindung stimmt.

32. Dagegen ist ein genaueres Urtheil des Auges und eine grössere Genauigkeit erforderlich, wenn man die Helligkeit eines Lichts bestimmen und mit einer gegebenen Helligkeit, welche als Maassstab angenommen wird, vergleichen will. Denn man kommt der gesuchten Wahrheit um so näher, je sorgfältiger diese Vergleichung ist.

33. Auf diese Grundlagen hin gehen wir mehr zu Einzelheiten über. Es bietet sich nämlich sogleich Anlass, die Grundbegriffe der Photometrie genauer zu entwickeln, um die verschiedenen Beziehungen, welche hinsichtlich der Helligkeit des Lichts und dessen [18] Leuchtkraft bestehen, auch durch den Ausdruck zu unterscheiden und jedes mit einem eigenen Namen zu bezeichnen.

34. Wenn man den Sprachgebrauch betrachtet, so findet man, dass der Begriff *Licht* (*lumen*) jedenfalls sehr unbestimmt ist. Es giebt nämlich Körper, welche an sich leuchtend sind und ein eigenes Licht besitzen. Es giebt auch sehr viele andere, welche durch erborgtes Licht sichtbar sind. Den Körpern der ersten Art kommt jedenfalls der Name *Licht* zu, wie z. B. der Sonne, der leuchtenden Kerze, der Feuerflamme und dem elektrischen Funken. Hierher muss man auch die Fixsterne rechnen, das faule Holz, ferner solche Würmer und Insecten, welche Nachts ein zwar schwaches aber doch sichtbares Licht verbreiten. Auch von den Körpern der anderen Art bezeichnet der Sprachgebrauch einige als Licht, zumal solche, welche in Abwesenheit eines grösseren Lichtes an dessen Stelle treten und die Gegenstände sichtbar machen. Hierher gehört besonders der Mond, die Planeten und bei Tage auch der Himmel, sofern dessen Licht in die Häuser tritt und die dort befindlichen Zimmer hell macht. Es ist auch nicht nöthig, dass uns diese Körper fortwährend die Stelle eines Lichts vertreten. So bezeichnet man auch bei Tage eine Flamme als ein Licht. Es genügt nämlich, wenn diese Körper dann und wann die Stelle eines Lichts vertreten. Und während

die meisten derartigen Körper, welchen man den Namen Lichter giebt, weiss sind, bezeichnet man die blaue Flamme des Schwefels als blaues Licht, sodass auch in dieser Beziehung die Begriffe Licht und Farbe wenig von einander verschieden sind; es besteht nur der Unterschied, dass das gefärbte Licht nicht so häufig vorkommt.

[**19**] 35. Da wir also nur das als Licht bezeichnen, was die Gegenstände entweder immer oder zeitweilig sichtbar macht, so hängt diese Benennung offenbar nicht von der Helligkeit ab. Denn sonst müsste man ein in den Sonnenschein gelegtes weisses Blatt Papier als Licht bezeichnen, da es eben so hell ist, wie eine Kerzenflamme, welcher gewiss Jedermann den Namen Licht beilegt. Alle anderen dem Auge vorkommenden Gegenstände bezeichnet man, sofern man sie sieht, als *beleuchtet* oder man sagt, dass sie erborgtes Licht besitzen. Wenn man aber sieht, dass auch diese die Helligkeit der Gegenstände dann und wann vermehren, wie z. B., wenn eine weisse Mauer Licht in ein Zimmer wirft, so sagt man, dass das Licht dort *reflectirt* wird.

36. Diesen Sprachgebrauch wird man auch mit wenigen Abänderungen in der Photometrie gebrauchen können. Auf jeden Fall muss man die Helligkeit einer Lichtquelle, welche einen Gegenstand beleuchtet, von der Helligkeit des von ihr erleuchteten Gegenstandes unterscheiden. In dieser Hinsicht werden wir der Lichtquelle *Leuchtkraft* (*vis illuminans*) oder *Helligkeit* (*splendor*) beilegen. Diejenige Helligkeit aber, welche dieselbe auf die Gegenstände ausbreitet, werden wir als *Beleuchtung* (*illuminatio*) bezeichnen.

37. Ferner ist die Helligkeit einer Lichtquelle, sofern sie vom Auge gesehen wird, von der Helligkeit derselben zu unterscheiden, sofern sie die Gegenstände beleuchtet. Jene wollen wir *scheinbare Helligkeit* (*claritas visa*) nennen, diese aber, wie schon erwähnt, wenn sie sich auf den leuchtenden Körper bezieht, als *Leuchtkraft*, wenn aber auf den Gegenstand, als *Beleuchtung* bezeichnen. Zwischen scheinbarer Helligkeit und Beleuchtung ist ein grosser Unterschied, und man muss sich wundern, dass *Wolf* beide Begriffe irrthümlich verwirrt hat, wenn er in seiner Optik sagt, dass entferntere Gegenstände deshalb weniger hell seien, weil das Licht umgekehrt wie das Quadrat der Entfernung abnimmt. [**20**] Dabei meint er aber die *scheinbare Helligkeit*, von welcher diese Behauptung mit Unrecht aufgestellt wird, während sie nur von der *Beleuchtung* gilt. Aehnlich findet man ab und zu, dass der scheinbaren Helligkeit der Planeten Eigen-

schaften beigelegt werden, welche sich nur auf die Beleuchtung beziehen. Es soll aber am gehörigen Ort gezeigt werden, wie gross der Unterschied ist, welcher zwischen beiden besteht.

38. Aehnlich muss man bei jedem leuchtenden Körper zwischen seiner scheinbaren und wahren Grösse unterscheiden; denn dieser Begriff kommt auch einer Lichtquelle in diesem zweifachen Sinne zu, indem man sich die Ausdehnung derselben bei gleichbleibender Helligkeit vergrössert oder verkleinert denken kann. Hieraus entspringt also der Begriff von der *wahren und scheinbaren Grösse* einer Lichtquelle. Die erstere ist etwas absolutes, die letztere hängt von der ersteren und zugleich von der Entfernung und Lage des Körpers ab.

39. Dagegen kann die Helligkeit eines leuchtenden Körpers in endlosen Stufen grösser oder geringer sein, auch wenn seine Entfernung und Distanz dieselbe bleibt. Hierher gehört das oben schon erwähnte Beispiel vom Eisen, welches bis zur Weissgluth erhitzt wird (28), ebenso der Fall, wenn ein Blatt Papier durch Kerzen beleuchtet wird, deren Zahl vermehrt oder vermindert wird, oder wenn das Blatt der Kerze genähert oder von ihr weiter entfernt wird. Diese verschiedene Helligkeit desselben Körpers wollen wir hinsichtlich des leuchtenden Körpers selbst als *Intensität des Lichts* oder als *Dichtigkeit der Strahlen* bezeichnen. In dieser Beziehung kann man sagen, dass das Sonnenlicht das intensivste Licht sei, da seine Strahlen am dichtesten sind.

40. Die Helligkeit eines Körpers, sofern er beleuchtet wird, haben wir ohne Zufügung einer weiteren Unterscheidung als Beleuchtung bezeichnet. *Wenn nämlich, wie es häufig vorkommt, der Fall eintritt, dass ein Körper* [**21**] *mit erborgtem Licht die Stelle einer Lichtquelle vertritt und wieder andere Körper beleuchtet* (34), *so gilt über ihn alles, was über die leuchtenden Körper gesagt worden ist.*

41. Es gibt auch noch eine andere synonyme Bedeutung des Wortes Licht (lumen), welche jetzt genauer zu bestimmen ist. Als Licht bezeichnet man nämlich bald den leuchtenden Körper selbst, bald aber die Helligkeit, welche ein solcher Körper um sich verbreitet. In diesem letzteren Falle sagt man, dass das Licht *ausgestrahlt werde* und sich durch den unendlichen Raum *fortpflanze*. Dabei lassen wir dahingestellt (5), ob sich entweder dabei nur seine Helligkeit oder Wirkung fortpflanzt, wie *Euler* annimmt, oder ob mit dieser Wirkung zugleich Lichttheilchen aus dem leuchtenden Körper ausströmen, wie *Newton*

anzunehmen vorzieht. Beide Ausdrucksweisen wird man ohne Gefahr eines Fehlers in der Photometrie anwenden dürfen, da evident erwiesen ist, dass das Licht nicht nur sich bewegt, sondern dass seine Bewegung auch eine allmähliche ist, sodass es gleichgiltig ist, ob man sagt, dass das Licht zugleich mit seinen Theilchen oder ohne dieselben den Körpern entströme. In der That wird die Wirkung dieselbe sein, indem sie so sein muss, wie sie mit den Versuchen übereinstimmt.

42. Wenn aber Licht aus einem leuchtenden Körper austritt, so redet man von einem *Lichtstrahl.* Nach *Newton* ist ein Strahl die Reihe der aufeinanderfolgenden Lichttheilchen, welche in gerader Linie aus dem leuchtenden Körper ausströmen; nach *Euler* ist er dasselbe wie eine geradlinig fortgetriebene Aetherwelle, ähnlich wie die Schallwellen in der Luft. Wie man sich aber auch das Wesen und die Beschaffenheit der Strahlen denkt, so muss man doch, wenn man die augenfälligste Wirkung betrachtet, jedenfalls zugeben, dass sie in zweifacher Hinsicht [**22**] zu betrachten sind. *Denn nothwendiger Weise muss man unterscheiden zwischen der Dichtigkeit der Strahlen und der Menge derselben.* Für uns wird es dabei hinreichend sein, an dem gewöhnlichen Begriff der Strahlen festzuhalten, welchen man von Jugend auf sich folgendermaassen aneignet.

43. Es falle z. B. Sonnenlicht durch ein Loch in ein gut verschlossenes dunkeles Zimmer; dann wird man sehen, dass die Staubtheilchen, welche in der Luft fliegen, erleuchtet sind und den Weg deutlich bezeichnen, längs dessen die Fortpflanzung des Lichts stattfindet. Diesen ganzen Raum in der Luft, welcher sich von der Oeffnung bis zum Boden des Zimmers ausdehnt, bezeichnet man, sofern das Licht ihn durchdringt, als Lichtstrahl. Da sich dieser umsomehr verdünnt, je enger das Loch gemacht wird, so entspringt hieraus der Gedanke, dass dieser Strahl aus mehreren anderen zusammengesetzt ist. Wenn man diesen weiter theilt, so erhält man hieraus den Begriff des einfachen oder gleichsam unendlich dünnen Strahles. Weiter kann man aber nicht gehen und muss deshalb hier stehen bleiben. Mehr wird aber in der Photometrie auch nicht verlangt, denn es genügt, den vorher beschriebenen einfachen Strahl genauer zu betrachten. Hierzu nehmen wir an, ein solcher Strahl werde durch ein weisses Blatt Papier aufgefangen, sodass er senkrecht darauf auffällt; dann ist klar, dass ein Stück des Blattes von diesem Strahl beleuchtet werden wird. Wenn man nun bei gleichbleibender Entfernung und Stellung des Blattes

gegen die Oeffnung die Weite des Loches vergrössert, so vergrössert sich offenbar das erleuchtete Flächenstück in gleicher Weise; denn jetzt wird dem Licht in reichlicherem Maasse der Zugang gestattet, oder, um mich einer abgebrauchten Wendung zu bedienen, es fallen mehr Strahlen auf das Blatt. Damit hat man also den Begriff von der *Menge der Strahlen.* Wenn also auch die Zerlegbarkeit der Lichtstrahlen nicht so weit geht, dass man das Wesen [**23**] eines einfachen Strahles daraus ableiten könne, so steht dennoch nichts im Wege, ein beliebiges Bündel von Strahlen, um diesen Ausdruck zu brauchen, als Einheit aufzufassen und vermöge dieser Einheit eine grössere Menge von Strahlen auszudrücken.

44. Man denke sich jetzt bei gleichbleibender Lage des Blattes und derselben Oeffnung des Loches an der Stelle der Sonne den Vollmond, so wird jetzt, da er dieselbe scheinbare Grösse hat, dasselbe Stück des Blattes erleuchtet werden, und doch wird eine grosse Verschiedenheit der Helligkeit stattfinden. Da also die Helligkeit des Blattes weit geringer ist, so muss man jedenfalls folgern, dass im früheren Falle auf dasselbe Stück des Blattes eine grössere Anzahl von Strahlen aufgefallen sei. Hiermit hat man den anderen Begriff, nämlich den von der *Dichtigkeit* oder *Intensität* der Strahlen. Man wird also die Strahlen als dichter bezeichnen, wenn eine grössere Anzahl auf dasselbe Flächenstück auffällt. Man wird dagegen bei gleichbleibender Dichtigkeit eine grössere Menge haben, wenn ein grösseres Stück erleuchtet wird.

45. Da wir später von dieser bekannten verschiedenseitigen Vorstellungsweise der Strahlen Anwendungen machen werden, so wird diese breitere Auseinandersetzung derselben keinen Anstoss erregen. Denn alle Beweise, welche im ersten Theil der Optik über den Weg des Lichts vorgebracht werden, beruhen auf diesem Begriff der Strahlen, mit dem einzigen Unterschiede, dass man dort nur auf den Weg des Lichts Rücksicht nimmt und deshalb die Strahlen als gerade Linien bezeichnet. Dagegen macht man in der Photometrie von dem Begriff des geradlinigen Lichtstrahles nur wenig Gebrauch, da es hier nur darauf ankommt, in wie weit eine Fläche durch ihn erleuchtet wird.

46. Nach dieser ausgedehnteren Entwickelung der photometrischen Grundbegriffe kehren wir zu den Erfahrungen zurück, welche oben kurz angedeutet wurden (21). [**24**] Es wurden nämlich die allgemein bekannten Sätze aufgestellt:

1) Zwei oder mehrere Kerzen leuchten stärker als eine einzige.

2) Ein Gegenstand erscheint heller, wenn er der Lichtquelle genähert wird.

3) Das Licht erleuchtet eine Fläche schwächer, wenn es schief auf sie auffällt.

Es fragt sich nun, nach welchem Gesetz diese Vermehrung oder Verminderung der Beleuchtung in den einzelnen Fällen vor sich geht. Denn wenn dieses Gesetz bekannt ist, so ergeben sich zugleich verschiedene Methoden, die Helligkeiten verschiedener Lichter unter einander zu vergleichen.

47. Wenn nun das Gesetz für einen einzigen dieser drei Fälle gegeben ist, so können, wie man leicht sieht, die übrigen durch Versuche erledigt werden. Nimmt man z. B. im ersten Falle an, dass sich die Beleuchtung in demselben Verhältniss vermehrt, wie die Anzahl der Kerzen, so bietet sich ein Mittel, eine Helligkeit zu verdoppeln, verdreifachen, vervierfachen u. s. w. Hierdurch kann man leicht die Entfernung bestimmen, bei welcher sich eine Beleuchtung verdoppelt, verdreifacht u. s. w., und ebenso bestimmt man die Einfallswinkel, unter welchen die Hälfte, der dritte Theil u. s. w. einer Beleuchtung stattfindet.

48. Um aber in dieser Angelegenheit positive Annahmen machen zu können, werden wir andere Erfahrungen zu Hilfe nehmen müssen, um durch sie diese Gesetze zu bestimmen. Es ist hinlänglich bekannt, dass die einzelnen Theile eines Gegenstandes überallhin sichtbar sind, wohin man sich auch wendet, ausser wenn sie von anderen verdeckt werden. Daraus hat man mit vollem Rechte längst den Schluss gezogen, dass ein beliebig kleines Theilchen der Oberfläche des leuchtenden Körpers [**25**] seine Strahlen nach jeder Richtung hin ausbreitet, und hieraus ist ferner der Begriff des *lichtausstrahlenden Punktes* entstanden. Deshalb hat man die Strahlen, welche aus einem solchen Punkte überallhin ausströmen, als vom Centrum aus *divergirend* bezeichnet und daher angenommen, dass sie sich je nach der grösseren Entfernung vom Centrum mehr vereinzeln oder dass ihre Dichtigkeit abnimmt. Und zwar mit gutem Grunde. Denn man denke sich zwei concentrische Kugelflächen, welche um den lichtausstrahlenden Punkt beschrieben seien. Dann ist klar, dass es die nämlichen Strahlen sind, welche diese beiden Flächen durchdringen. Sie sind aber auf der grösseren Kugelfläche auf einen grösseren Raum verbreitet und deshalb ist dort jedenfalls die Dichtigkeit der Strahlen geringer; und da man im Allgemeinen die Dichtigkeit ansehen muss als die Anzahl der Strahlen dividirt durch das Flächenstück, so folgt, *dass in diesem*

Fall die Dichtigkeit mit der zunehmenden Oberfläche der Kugeln abnimmt, also sich umgekehrt verhält, wie das Quadrat der Entfernung vom lichtausstrahlenden Punkte.

49. Diesen oder einen ähnlichen Beweis findet man in allen Darstellungen der Optik, sodass es überflüssig ist, länger dabei zu verweilen. Denn er entspricht allen Erscheinungen des Lichts und kann hinlänglich durch Versuche bestätigt werden.

50. Dass verschiedenes Licht sich nicht gegenseitig hinderlich ist, wenn es denselben Raum durchdringt, ist so klar, dass ein Beweis nicht nöthig ist. Geradezu bewundernswerth ist es, wie sich die Lichtstrahlen durch den ganzen Weltraum ausbreiten, indem die einzelnen Punkte der Gegenstände ihre Strahlen überallhin aussenden und dieselben überall dem Auge sichtbar machen. Bewundernswerth ist es auch, wie unzählige Strahlen gleichzeitig durch eine noch so enge Oeffnung dringen, indem man durch eine solche Oeffnung, die sich in einer Metallplatte befindet oder die man mit einer noch so feinen Nadel in ein Blatt Papier [**26**] gestochen hat, wenn man die Oeffnung dem Auge nähert, die einzelnen Gegenstände auf einen Blick übersehen kann. Wenn man dies auf ein dunkles Zimmer anwendet, und mit einem weissen Blatt die Strahlen auffängt, so zeigt dasselbe innen die einzelnen äusseren Gegenstände.

51. Auf dieser wunderbaren Eigenschaft der Lichtstrahlen beruht zum grössten Theil auch das zweite Gesetz, nämlich *dass die Beleuchtung eines Blattes um so stärker ist, je grösser die Anzahl der leuchtenden Kerzen ist, vorausgesetzt, dass dieselben gleich hell sind, von dem Blatt gleichweit entfernt sind und endlich dieselbe Grösse besitzen.* Denn da verschiedenes Licht sich gegenseitig nicht stört, so muss offenbar das Blatt bei Hinzufügung beliebig vieler neuer Kerzen um eben so viel Grade an Helligkeit zunehmen. Denn im Allgemeinen tritt zum ersten Helligkeitsgrad ein zweiter, dritter u. s. w., ohne Beeinträchtigung der vorherigen.

52. Wenn man nun die Kerzen durch eine andere Lichtquelle ersetzt, welche gleich hell ist und dieselbe scheinbare Grösse besitzt, wie alle Kerzen zusammengenommen, so wird dadurch auf dem Blatt dieselbe Helligkeit erzeugt werden. Daher kann man, wie auch die Optiker schon längst festgestellt haben, jedenfalls annehmen: *dass die Beleuchtung um so stärker ist, je grösser die Oberfläche des leuchtenden Körpers ist, wenn dabei die Leuchtkraft und die Entfernung der Lichtquelle unverändert bleiben.* Dabei ist aber wohl zu bemerken, dass wir es

hier mit der scheinbaren Oberfläche zu thun haben. Dass die Sache sich anders verhält, wenn die Fläche Ausbuchtungen besitzt, oder wenn man auf ihre wahre Gestalt Rücksicht nimmt, soll an passender Stelle noch gezeigt werden.

53. In ähnlicher Weise haben die Optiker auch das dritte Gesetz festgestellt, welches sich auf den Einfallswinkel bezieht. Dass [27] die Anzahl der Strahlen überhaupt geringer ist, wenn sie unter schiefem Winkel auf dieselbe Fläche einfallen, ist leicht zu sehen. Dieselben werden dadurch mehr vereinzelt und das Blatt muss nothwendig schwächer beleuchtet werden. Dass aber die Helligkeit in demselben Verhältniss abnimmt wie der Sinus des Einfallswinkels, wird folgendermaassen bewiesen: Zwischen den Parallelen CA, DB mögen parallele Strahlen auf die

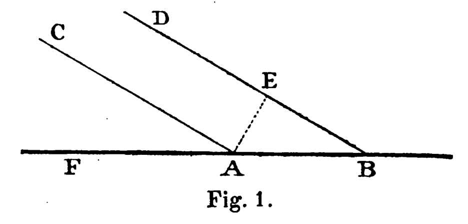


Fig. 1.

Ebene AB auffallen unter einem Winkel $CAF = DBF$. Nimmt man nun an, dass dieselben Strahlen durch eine Ebene AE aufgefangen werden, welche auf der Richtung der Strahlen senkrecht steht, so fängt offenbar das Stück AE dieselbe Anzahl der Strahlen auf wie vorher das grössere Ebenenstück AB. Sie müssen also in AE dichter sein, als in AB. Da nun die Dichtigkeit sich verhält wie die Anzahl der Strahlen, dividirt durch das betroffene Ebenenstück, so ist die gleiche Anzahl der Strahlen im ersten Falle durch AB, im zweiten durch AE zu dividiren und die Dichtigkeit in AB wird sich zur Dichtigkeit in AE umgekehrt verhalten wie diese Strecken, oder direct wie AE zu AB. Wenn man nun AB als Radius und als Einheit annimmt, so wird AE der Sinus des Incidenzwinkels sein. Deshalb *verhält sich die senkrechte Beleuchtung zur schiefwinkeligen, wie die Einheit zum Sinus des Incidenzwinkels.* Sie nimmt also ab mit dem Sinus des Incidenzwinkels.

54. Dies sind also die Beweise für diese drei Gesetze, durch welche die Veränderung und Stärke der Beleuchtung in jedem gegebenen Falle bestimmt wird, wie man sie in allen Büchern über Optik findet. Aber, genau genommen, lässt sich keines

derselben für sich durch Versuche bestätigen, da, wie wir oben gesehen, das dabei erforderliche Urtheil des Auges, ausser in Rücksicht der Gleichheit, nicht [28] als sicher zugelassen werden kann (7, 11, 29). Es möge nämlich ein Blatt durch das Licht einer Kerze beleuchtet werden. Ferner habe man ein zweites, auf welches zwei Kerzen ihre Strahlen ausbreiten. Das letztere wird man gewiss weit heller erblicken; ob aber die Helligkeit die doppelte ist, dies lässt sich zwar zufolge einer angestellten Ueberlegung annehmen, nicht aber mit Sicherheit durch das Auge entscheiden. In ähnlicher Weise wird man ein von der Kerzenflamme entfernteres Blatt dunkler sehen, als ein anderes, welches näher steht; aber das Auge vermag nicht zu entscheiden, welcher Unterschied und welches Verhältniss zwischen beiden Helligkeiten stattfindet. Ebenso wird man das schiefwinklig einfallende Licht etwas dunkler sehen, aber mit der blossen Hilfe des Auges wird man die Abnahme des Lichts nicht messen können. Worin besteht also die Sicherheit dieser Sätze, wenn sie auf dem sogenannten aposteriorischen Wege gewonnen werden muss?

55. In der That gibt es eine Methode, jedes beliebige dieser Gesetze an der Hand der Erfahrung mit den übrigen zu vergleichen und den Beweis zu erbringen, dass, wenn das eine davon als wahr zugelassen ist, auch die anderen wahr sein werden, sodass dieselben gleichsam durch ein gemeinsames Band verknüpft werden, infolge dessen sie sich gegenseitig bestätigen oder zerstören. Denn sie sind zwar alle aus derselben höchst natürlichen Auffassungsweise des Lichts abgeleitet; da aber Fehlschlüsse in der Physik sehr leicht möglich sind und häufig vorkommen, so werden diejenigen, welche in den Beweisen einer Wissenschaft die höchste Strenge fordern, vor einem logischen Zirkel warnen, der sich nach ihrer Meinung hier einschleicht.

56. Aber soviel ich auf dem Gebiet der Physik sehe, ist wirkliche Strenge in solchen physikalischen Beweisen äusserst selten oder findet überhaupt nicht statt. [29] Denn die Sicherheit wird ihre höchste Stufe erreichen, wenn ein Gesetz so mit den einzelnen Erscheinungen übereinstimmt, dass es keiner derselben offen widerspricht und mit allen aufs beste übereinstimmt, so weit man auch die Versuche ausdehnt. Dass aber diese drei Gesetze diese Beschaffenheit haben, dies wird man in diesem ganzen Werk über Photometrie in einer Weise bestätigt finden, welche keinen Zweifel übrig lässt.

57. Damit man aber auch an dieser Stelle einen Beweis für

diese Behauptung nicht vermisse, so wollen wir sofort sehen, wie diese Gesetze sich durch die Zuziehung von Versuchen gegenseitig bestätigen.

58. **Versuch 1.** Auf der Platte ABC mögen in A zwei gleich helle Kerzen stehen, auf CD stehe eine weisse ebene

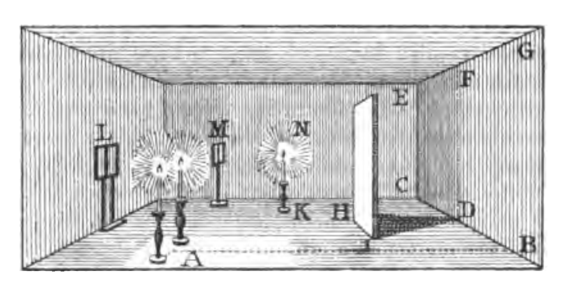


Fig. 2.

Fläche oder ein Blatt Papier derart, dass die Strahlen von A auf den Theil $BGFD$ der Ebene senkrecht auffallen. Auf HI stehe eine andere weniger breite Ebene so, dass der von beiden Kerzen in A geworfene Schatten den hinteren Theil $DFEC$ der Ebene bedeckt. Andererseits stehe in K eine weitere Kerze, welche ebenso hell ist, als die vorhergehenden, und zwar so, dass der von der Ebene HI geworfene Schatten nur den vorderen Theil $DFGB$ der Ebene bedeckt. Auf diese Weise wird also der vordere Theil $BGFD$ von zwei Kerzen, der hintere dagegen von einer einzigen beleuchtet werden. Unter Festhaltung dieser Bedingung bewege man die Kerze K zur Ebene BE hin oder davon weg, bis beide Theile DG und DE gleich hell erscheinen. Hierauf bestimme man die Entfernung der Kerzen von der Ebene BC; dann wird sich AB zu KC verhalten, wie $\sqrt{2}$ zu 1, oder mit anderen Worten: man wird finden, dass das Quadrat der Distanz AB [**30**] sich zum Quadrat der Distanz KC verhält wie 2 zu 1, oder allgemeiner: wie die Anzahl Kerzen in A zur Anzahl derjenigen in K. Denn man kann den Versuch auf dieselbe Weise mit mehreren Kerzen wiederholen. Er wird um so genauer sein, je mehr die einzelnen Kerzen an Grösse und Helligkeit gleich sind.

59. **Versuch 2.** Den eben beschriebenen Versuch kann man auch bloss mit einer einzigen Kerze, aber mit Benutzung von Planspiegeln folgendermaassen einrichten. Die Kerze befinde

sich in K, und man nähere ihr die Ebene HI so weit, bis ihr Schatten die ganze Ebene BE bedeckt. Hierauf bringe man in L hinter der Kerze zwei oder mehrere Spiegel so an, dass sie das Licht auf den Theil $BGFD$ der Ebene reflectiren. Die Spiegel müssen dabei von der Kerze gleichweit entfernt sein und gegenseitig sehr nahe bei einander stehen. Nun nehme man einen anderen Spiegel und stelle ihn näher zur Kerze und zwar so, dass er das Licht derselben auf den Theil $DFEC$ der Ebene werfe und diesen eben so hell erleuchte, wie der Theil $GBFD$ von jenen zwei Spiegeln erleuchtet wird. Man weiss aber aus der Katoptrik, dass die Beleuchtung eben so vor sich geht, als wenn die Kerze dort stände, wo man bei diesem Versuch ihr Bild erblickt, welches hinter der Spiegelfläche ebenso weit von ihr absteht, wie die Kerze. Man muss also die Entfernung der Spiegel von der Ebene BE nehmen und zu dieser die Entfernung desselben von der Kerze zufügen. Dann wird man finden, dass das Quadrat der Summe der Entfernungen $LG + LN$ sich zum Quadrat der Entfernungen $ME + MN$ verhält, wie die Zahl der Spiegel in L zur Zahl der Spiegel in M, [**31**] falls an beiden Stellen mehrere Spiegel standen.

60. Wir müssen nun aber beweisen, dass, wenn man das Gesetz § 51, 52 als richtig annimmt, das Gesetz § 48 durch diese Versuche bestätigt wird, und umgekehrt. Aus den Versuchen folgt nun zunächst, dass, wenn die Beleuchtung dieselbe bleiben soll, sich das Quadrat der Entfernung der Kerzen verhalten muss wie die Anzahl derselben. Daher ist die von einer einzelnen Kerze herrührende Beleuchtung um so schwächer, je grösser diese Anzahl ist (51, 52), also auch je grösser das Quadrat der Entfernung ist. Mithin verhält sich dieselbe umgekehrt wie dieses Quadrat.

61. Für diesen Satz soll noch ein analytischer Beweis beigebracht werden. Sei n die Anzahl der Kerzen in A, und sei J die daraus entspringende Beleuchtung, welche wir als constant annehmen. Dann ist nach Voraussetzung die von jeder einzelnen Kerze herrührende Beleuchtung $= J : n$; wir setzen dieselbe $= c$, so dass $c = J : n$. Nach dem Versuch ist aber $n =$ Quadrat der Entfernung; nennt man diese $= d$, so wird $n = d^2$; wegen $c = J : n$ hat man daher $c = J : d^2$ oder wegen $J =$ const. auch: $c \backsim 1 : d^2$. Ebenso verläuft der Beweis, wenn man den zweiten Versuch zuzieht und an die Stelle der Kerzen deren Bilder setzt, welche von den Spiegeln erzeugt werden.

62. **Versuch 3.** Auf der Geraden AB stehe eine weisse Ebene. In C befinde sich eine oder mehrere Kerzen, ebenso in

D, aber in grösserer Anzahl als in *C*. Ferner sei auf *EF* ein ebener Schirm errichtet, welcher den Punkt *B* gegen die Kerze *C* beschattet, ebenso den Punkt *A* gegen die Kerzen in *D*. Dann ermittele man durch Versuche diejenige Stellung der Kerzen, bei welcher sie von den beleuchteten Punkten [**32**] *A* und *B* gleichweit entfernt sind und dort die Ebene gleich stark erleuchten. Misst man dann die Einfallswinkel *CAB* und *DBG*, so wird man finden, dass ihre Sinus in demselben Verhältniss stehen wie die Anzahlen der Kerzen in *D* und *C*. Durch diesen Versuch wird bewiesen, dass die Gesetze in § 51 und § 53 von einander abhängig sind und sich gegenseitig bestätigen.

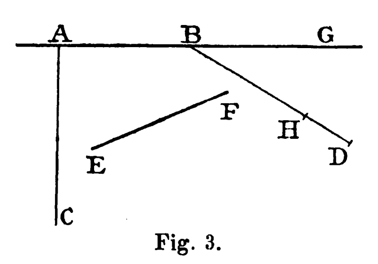


Fig. 3.

63. **Versuch 4.** In *C* stehe wieder eine Kerze; eine andere gleich helle und gleich grosse werde auf der Geraden *BD*, z. B. in *H* so aufgestellt, dass die Ebene in *A* und *B* gleich hell erleuchtet wird; dann wird man finden, dass sich die Sinus der Einfallswinkel umgekehrt verhalten wie die Quadrate der Entfernung der Kerzen von den Punkten *A* und *B*. Dieser Versuch beweist wieder die Uebereinstimmung der Gesetze § 48 und § 53, welche sich gegenseitig bestätigen. Man wird, ohne dass ich ein Wort zu verlieren brauche, leicht sehen, dass diese beiden Versuche auch mit Hilfe von Spiegeln ausgeführt werden können.

64. Es gibt noch mehrere und wesentlich andere Versuche, als die vorgebrachten, mit deren Hilfe man diese Gesetze gegenseitig bestätigen kann. Man muss aber die Beibringung derselben bis dahin verschieben, wo die Principien, auf welche sie sich stützen, im Folgenden entwickelt werden. Inzwischen lassen wir uns an den beschriebenen genügen, um zu sehen, auf welche Art die verschiedensten Beleuchtungen mit einander verglichen werden können. Denn auf diese Weise schaffen wir uns im Voraus die Hilfsmittel, um später die verschiedenen Grade der Beleuchtung zu bestimmen.

65. [**33**] Aus dem Gesagten leuchtet ein, dass auf mehrfache Weise die Möglichkeit gegeben ist, eine beliebige Beleuchtung so zu modificiren, dass sie nicht nur einer gegebenen Beleuchtung gleich wird, sondern dass man auch erkennt, in welchem Verhältniss und um wie viel dieselbe zu- oder abgenommen hat.

Denn wenn man die Entfernung der Lichtquelle von dem Blatt oder der beleuchteten Ebene, oder wenn man die Stellung der letzteren reguliren kann, so ist es jedenfalls möglich, eine Beleuchtung mit einer gegebenen gleich zu machen. Denn die veränderte Beleuchtung wird sich immer direct wie der Einfallswinkel und umgekehrt wie das Quadrat der Entfernung verhalten.

66. Es sei z. B. die Beleuchtung eines Blattes, welche durch den Mond hervorgebracht wird, zu vergleichen mit der Beleuchtung desselben Blattes durch eine Kerze. Nun ist leicht ersichtlich, dass dies auf verschiedene Art geschehen kann. Wie man aber auch verfährt, immer muss man das Blatt sowohl den Strahlen des Mondes wie der Kerze aussetzen, indem man einen Gegenstand so dazwischen stellt, dass der vom Mond beleuchtete Theil von den Strahlen der Kerze nicht getroffen wird und umgekehrt. Während man an dieser Regel festhält, wird man die Entfernung der Kerze so lange vergrössern oder verkleinern können, bis beide Stellen des Blattes gleich stark beleuchtet erscheinen. In ähnlicher Weise wird man auch durch die Benutzung mehrerer Kerzen die durch sie hervorgerufene Beleuchtung des Blattes mit der Beleuchtung durch den Mond oder eine andere Lichtquelle vergleichen können. Aber durch diese Versuche findet man, wie wohl zu bemerken ist, noch nicht das Verhältniss zwischen der Helligkeit der Lichtquellen selbst und man kann noch nicht die Helligkeit des beleuchteten Blattes vergleichen mit der Helligkeit des leuchtenden Körpers. Das erstere kann man jedoch leicht erreichen, wenn man sowohl auf den Einfallswinkel wie auf die scheinbare Grösse [**34**] Rücksicht nimmt. Es wird später der Ort sein, dies breiter auseinanderzusetzen.

67. Es bleibt noch übrig einige Begriffe zu entwickeln, deren gegenseitige Unterscheidung später von Nutzen sein wird. Es wurde schon bemerkt, dass von jedem Punkte der leuchtenden Fläche nach allen Richtungen Strahlen ausgesandt werden. Sei also AB eine solche Fläche, und befinde sich ihr gegenüber eine andere CD, welche beleuchtet werde. Dann verbreiten sich also die Strahlen, die von einem beliebigen Punkte E ausgehen, auf die ganze Fläche CD. Im Folgenden wird es nun oft vorkommen, dass die Summe derselben gesucht wird, wie auch die Gesammtmenge der

A E B
C F D

Fig. 4.

Helligkeit, welche auf CD nach Maassgabe der verschiedenen Entfernungen und Einfallswinkel hervorgebracht wird. Deshalb ist es gut, sie in dieser Hinsicht von den übrigen Arten der Strahlen zu unterscheiden. Wir werden sie also *die von dem Punkte ausgehenden* oder *divergirenden Strahlen* nennen.

68. Dagegen fallen auf einen beliebigen Punkt F der Fläche CD aus den einzelnen Punkten der Fläche AB Strahlen, deren Dichtigkeit den Grad der Beleuchtung bestimmt, welcher von der leuchtenden Fläche AB herrührt. Auch von solchen Strahlen wird im Folgenden in ausgedehntem Maasse die Rede sein. Um sie also von den anderen zu unterscheiden, wollen wir sie als *auf den gegebenen Punkt einfallende Strahlen* bezeichnen.

69. Man begegnet noch einer anderen Unterscheidung bezüglich der leuchtenden sowohl wie der beleuchteten Punkte, welche jedenfalls zu bemerken ist. Denn entweder betrachtet man einen Punkt einzeln für sich, und hierher kann man die sogenannten *leuchtenden Punkte* rechnen, welche man sich gleichsam als einzeln im leeren Raum befindlich vorstellt, und welche ihr Licht frei nach allen Seiten hin verbreiten. Oder aber, man sieht einen Punkt als den Theil einer Fläche an, wie z. B. im vorigen Paragraphen [**35**] die Punkte E und F. Solche Punkte wollen wir zum Unterschied gegen die erste Art als *Punkte der Fläche* bezeichnen. Bezüglich derselben muss man allgemein bemerken, dass sie *keineswegs als geometrische* Punkte anzusehen sind, welche überhaupt keine Ausdehnung haben, sondern als physische Punkte, welche eine, zwei, oder auch drei wenn auch noch so kleine Ausdehnungen besitzen, je nachdem sie Theile einer Linie, einer Fläche oder eines Körpers sind. Dieser Begriff ist in die Optik bereits aufgenommen und wird nicht zu Irrthümern führen, wenn wir an seine Bedeutung hier erinnern. Sie werden zu geometrischen Punkten dann werden, wenn die unendliche Theilbarkeit des Lichts nicht nur als möglich, sondern auch als wirklich erwiesen ist. Für uns genügt es, sie hier als unendlich klein anzusehen. Wenn jedoch Dunkelheit oder Zweideutigkeit zu vermeiden ist, so werden wir uns noch anderer mehr handgreiflicher Ausdrucksweisen bedienen, die in die Geometrie Aufnahme gefunden haben.

Kapitel 2.

Messung und Stärke des directen Lichts.

70. Die im vorigen Kapitel besprochenen Sätze, die wir jetzt anwenden werden, sind folgende: die Beleuchtung nimmt ab umgekehrt wie das Quadrat der Entfernung (48), dagegen direct wie der Sinus des Einfallswinkels (53), sie ist um so stärker, je grösser die dem beleuchteten Gegenstand zugewandte Oberfläche ist (52), und je intensiver [**36**] die der Lichtquelle eigenthümliche Helligkeit ist (39). Da nun diese Bedingungen, von welchen die Stärke der Beleuchtung abhängig ist, auf unendlich viele Arten verschieden sein können, so gibt es auch ebenso viele Modificationen der Beleuchtung. Die hauptsächlichsten derselben werden wir gleichsam als Typen in diesem Kapitel durchsprechen, damit die daraus folgenden Lehrsätze in den folgenden Theilen der Photometrie als Grundlagen dienen können.

71. Bevor wir aber dazu kommen, muss erst noch eine andere sehr wichtige Frage gelöst werden, die bisher nur wenig berührt wurde. Wir haben gesehen, dass die Beleuchtung abhängig ist von der Lage der beleuchteten Fläche, und dass dieselbe um so schwächer wird, je schiefer diese Fläche von den Lichtstrahlen getroffen wird oder je kleiner der Einfallswinkel ist. Es ist also nicht gleichgiltig, wie die beleuchtete Fläche liegt und welches die Neigung der einfallenden Strahlen ist. Jetzt fragt es sich aber, ob sich die Sache ebenso verhält in Bezug auf die Lage der leuchtenden Fläche, welche ihre Strahlen auf den Gegenstand ausbreitet. Hierüber beobachten die meisten, welche über Beleuchtung der Gegenstände geschrieben haben, tiefes Stillschweigen. *Euler* ist, wenn ich nicht irre, der einzige, der das Wesen des Lichts genauer und scharfsinniger durchforscht hat und der zugleich auf diesen Umstand Rücksicht nahm und ihn gelegentlich seiner Untersuchung über die Helligkeit der Planeten der Rechnung unterwarf. Vergl. dessen *Réflexions sur les degrés de la lumière du Soleil et des autres Corps célestes* in den *Mémoires de l'Académie de Berlin.*

[**37**] 72. In dieser sehr sorgfältigen Schrift sagt der berühmte Verfasser, wenn ich ihn recht verstanden habe, ausdrücklich, dass die Lage der leuchtenden Fläche gleichgiltig sei, und es gehe dieselbe Beleuchtung hervor für jede Schiefe, unter welcher die Strahlen austreten. Deshalb behauptet er, die

Beleuchtung eines Körpers durch die Sonne sei so, wie sie sich ergeben würde, wenn man sich die uns sichtbare Hälfte der Sonnenoberfläche in eine Ebene ausgebreitet denkt, dass also die Sonne nicht in dem Verhältniss leuchte, wie eine ebene Scheibe, sondern nach Maassgabe des wahren Oberflächenstückes, welches den Augen zugewandt ist. Ebenso behauptet er, dass die Mondberge dadurch, dass sie die Oberfläche dieses Körpers vergrössern, auch seine Helligkeit und Leuchtkraft vergrössern. Dies ist, wenn ich mich recht erinnere, diejenige Lösung, welche der scharfsinnige *Euler* für die in Rede stehende Frage gegeben hat. Die Abhandlung selbst ist mir nicht zugänglich.

73. Wenn sich dies wirklich so verhält, so sieht man, dass die Unterscheidung zwischen scheinbarer Helligkeit und Beleuchtung unbeachtet gelassen ist, die wir früher als höchst wichtig bezeichnet haben (37). Nun wird niemand zu leugnen wagen, dass das Auge, mit einem Helioskop ausgerüstet, die Oberfläche der Sonne, wo es dieselbe auch betrachtet, gleichmässig hell erblickt. Deshalb bleibt nur noch zu untersuchen, ob auch die Stärke der Beleuchtung, welche von den Strahlen ausgeht, die aus der Nähe des Sonnenrandes kommen, dieselbe ist wie diejenige, welche von Strahlen herrührt, die aus dem Centrum der Scheibe kommen. *Euler* scheint nämlich seine Rechnung so angelegt zu haben, als ob die Dichtigkeit der Strahlen überall im Verhältniss des ausstrahlenden Oberflächenstückes stehe, ohne Rücksicht auf die mehr oder weniger schiefe Stellung.

[**38**] 74. Es ist mir jetzt noch nicht möglich, für diese Frage eine Erörterung zu geben, welche sich auf einen in jeder Beziehung vollständigen Beweis stützt, da sie von solchen Sätzen abhängt, welche erst späterhin aufgestellt werden. Indessen wird es hinreichend sicher sein, wenn man sowohl die Erfahrung wie gewisse Sätze, welche im ersten Theil der Optik hinlänglich bewiesen werden, zu Hilfe ruft, um scheinbare Helligkeit und Beleuchtung gegenseitig vergleichen zu können. Zu diesem Zweck nehmen wir als allgemein bekannt an, dass die Strahlen, welche von irgend einem Punkt eines Körpers, den wir sehen, sich auf die äussere Oberfläche des Auges ausbreiten, dort so gebrochen werden, dass sie sich auf der Netzhaut in einen Punkt vereinigen und dort das Bild von diesem Punkte zeichnen. Das letztere muss aber selbstverständlich um so heller werden, je mehr Strahlen in diesem Punkt der Netzhaut zusammentreffen.

75. Hieraus folgt ohne weiteres, dass die Helligkeit des Bildes um so grösser ist, je grösser die Dichtigkeit der Strahlen und die Oeffnung der Pupille war. Man kann aber voraussetzen, dass diese Oeffnung constant bleibt, wenn man den Rand oder wenn man das Centrum der Sonne ansieht. Deshalb muss man annehmen, dass die Helligkeit des Sonnenbildes und auch jedes beliebigen Theiles desselben sich einfach verhält, wie die Dichtigkeit der Strahlen. Hieraus folgt aber, dass die Dichtigkeit der Sonnenstrahlen dieselbe ist, gleichviel ob sie vom Rande oder vom Centrum der Sonnenscheibe her in das Auge dringen; denn man muss annehmen, dass das Bild überall gleich hell ist, da man sieht, dass die Theile der Sonnenscheibe dieselbe Helligkeit besitzen.

76. Hieraus muss man aber nothwendigerweise schliessen, dass aus jedem beliebigen Punkte der Sonnenscheibe[**39**] dieselbe Menge von Strahlen auf einen gegebenen Theil der Augenfläche auffalle. Denn obwohl sich dieselben auf die ganze Oberfläche des Auges ausbreiten, so geben sie doch auf der Netzhaut jedem Theil des Bildes die entsprechende Helligkeit. Nun ändert sich die Menge dieser Strahlen keineswegs, wenn man statt der Augenfläche die Oberfläche eines anderen Körpers substituirt, und hieraus folgt, dass auf dieser Fläche von jedem Theil der Sonnenscheibe eine Beleuchtung erzeugt wird, welche dem Flächenraum proportional ist, welchen dieser Theil auf der Netzhaut des Auges einnimmt, also proportional nicht der wahren, sondern der scheinbaren Grösse. Dies zu folgendem Zweck.

77. Der Kreis ACB stelle die Sonnenscheibe vor, die wir hier als eben annehmen; ihr Durchmesser sei AB. Derjenige Schnitt der Sonnenfläche, welcher senkrecht auf diesem Durchmesser steht, werde in seinem vorderen, dem Auge zugewandten Theil durch den Halbkreis AMB dargestellt, welcher demnach als senkrecht auf dem Durchmesser AB stehend gedacht wird. Mm sei ein beliebig kleines Theilchen dieser Fläche. Aus M und m fälle man die Perpendikel MP und mp, so wird Pp der scheinbaren Grösse des Theilchens Mm gleich und dem Bilde desselben auf der Netzhaut des Auges proportional sein.

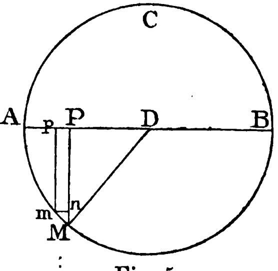


Fig. 5.

78. Man hat aber gesehen, dass diesem Bild auch die Mengen der auf die Oberfläche des Auges fallenden Strahlen proportional sind, diese müssen also, da sie alle aus dem Theilchen Mm kommen, nothwendig dem Pp proportional sein. *Es steht also die Anzahl der Strahlen, welche aus einem beliebigen Theil der Sonnenoberfläche Mm auf eine gegebene Fläche auffallen, in demselben Verhältniss, wie das auf dem Durchmesser der Scheibe abgeschnittene Stück Pp.*

[**40**] 79. Wenn man daher bedenkt, dass die Stärke der Beleuchtung um so grösser ist, je mehr Strahlen auf dieselbe Fläche fallen (indem dieselben dichter sind), so findet man folgenden Satz erwiesen: *Die Stärke der Beleuchtung, welche von einem beliebigen Oberflächenelement Mm herrührt, verhält sich nicht wie der wahre Flächeninhalt Mm desselben, sondern wie der scheinbare Pp, welcher von ersterem auf der Sonnenscheibe bedeckt wird.* Diese beiden sind aber von einander verschieden, sobald die Fläche Mm gegen AP geneigt ist. Wenn man deshalb auf der Sonne alle beliebigen Theilchen Mm gleich hell *sieht*, so ist doch die daher entspringende *Beleuchtung* keineswegs dieselbe. Es ist also auch in dieser Hinsicht falsch, Beleuchtung und scheinbare Helligkeit mit einander zu verwechseln. Dass dies noch in anderer Hinsicht falsch ist, haben wir bereits oben gesehen (37).

80. Da die Sonnenstrahlen, wenn sie in das Auge oder sonst auf eine gegebene Fläche fallen, eine Richtung befolgen, die zur Ebene der Scheibe senkrecht ist, so kann man sie offenbar alle annehmen als senkrecht zum Durchmesser AB. Deshalb treten nur diejenigen normal aus der Sonnenfläche aus, welche vom Centrum kommen. Alle anderen treten mehr oder weniger schief aus. Hieraus folgt von selbst der Begriff des *Emanationswinkels*, der zu der Oberfläche, von welcher die Lichtstrahlen kommen, in derselben Beziehung steht wie der Incidenzwinkel zu der von den Strahlen beleuchteten Fläche. Er ist nämlich der Winkel zwischen der leuchtenden Oberfläche und der Richtung des Lichtstrahles.

81. Im vorliegenden Beispiel sind die Strahlen gerichtet wie die Geraden PM, pm. Der Emanationswinkel wird also der Scheitelwinkel zu mMP [**41**] und dem letzteren gleich sein. Da also $mMP = PDM$ ist, so wird der Emanationswinkel durch den Bogen AM gemessen und MP ist sein Sinus. Aber wegen $mn = pP$ ist $Mm : Pp = MD : MP$. Deshalb verhält sich der Flächenraum mM, von welchem die Strahlen herkommen,

zur Stärke der Beleuchtung, welche durch den Abschnitt Pp dargestellt wird, wie die Einheit zum Sinus des Emanationswinkels. *Also nimmt die Leuchtkraft, sowie die Beleuchtung selbst, ab im Verhältniss des Sinus des Emanationswinkels.*

82. Da von diesem höchst wichtigen Satz in der ganzen Photometrie der ausgedehnteste Gebrauch gemacht wird, so ist es gut, ihn ausführlicher zu besprechen. Zunächst folgt nun aus demselben klar, *dass es keineswegs gleichgiltig ist, in welcher Stellung sich die leuchtende Fläche befindet.* Die leuchtende Fläche CD möge der Ebene AB gegenüberstehend und parallel sein mit ihr; dann werden die Strahlen GP unter einem rechten Winkel austreten und auffallen und daher in P das Maximum der Beleuchtung erzeugen. Aendert sich aber die Stellung der leuchtenden Fläche, bleibt dagegen die Entfernung GP und die Grösse EF dieselbe, so wird die Stärke der Beleuchtung kleiner nach Maassgabe des Sinus des Emanationswinkels PGF, und die Ebene wird also in P schwächer beleuchtet werden.

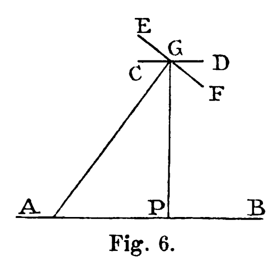


Fig. 6.

83. Anders verhält sich dagegen die Sache, wenn man die Stärke der Beleuchtung für den Punkt A sucht, wobei die Strahlen GA aus der Oberfläche EF senkrecht und aus der Fläche CD schief austreten. Denn der Einfallswinkel GAB ist in beiden Fällen derselbe und deshalb wird sich die Beleuchtung im ersten Falle zu derjenigen im zweiten Fall verhalten wie die Einheit zum Sinus des Emanationswinkels CGA. Daher sieht man, *dass die Beleuchtung sich ändert, wenn sich bei gleichbleibender Distanz und Grösse des leuchtenden Flächenstücks die Stellung des leuchtenden oder des beleuchteten Flächenstückes ändert.*

[**42**] 84. Um dieses neue Gesetz über die Stärke der Beleuchtung abzuleiten, haben wir bisher nur eine einzige Beobachtung benutzt, und deshalb wird es keineswegs überflüssig sein, dasselbe durch andere Beobachtungen zu bestätigen, unter welchen die am häufigsten vorkommende folgende ist. Wenn man eine weisse Mauer, die von der Sonne oder vom Himmel beleuchtet ist, von irgend einer Seite ansieht, so wird dieselbe, wenn die Oeffnung der Pupille dieselbe bleibt, in jedem Falle merklich

gleichmässig weiss aussehen und immer in derselben Stärke der Helligkeit erscheinen mit der einzigen Ausnahme, dass die Mauer von dort aus etwas heller erscheint, wo die Strahlen verlaufen, welche die Mauer im ersten Falle ähnlich wie ein roher Spiegel reflectirt. Im zweiten Fall ist dies anders, da sie von allen Seiten her durch die Hälfte der Himmelskugel erleuchtet wird. Man kann dies auch beobachten, wenn man eine weisse Platte unter freiem Himmel so hinlegt, dass sie von der ganzen Himmelshalbkugel beleuchtet wird, während entweder der Himmel mit weissen Wolken gleichmässig bedeckt ist, oder während kurz vor Aufgang oder kurz nach Untergang der Sonne Dämmerung herrscht. Dann sieht man nämlich diese Platte, von wo aus man sie auch betrachten mag, merklich gleichmässig hell. Da dies sich so verhält, so folgert man ebenso wie oben, dass die Beleuchtung sich wie der Sinus des Emanationswinkels verhält. Es werden unten noch mehrere Experimente vorkommen, die eigens zu dem Zweck angestellt wurden, diesen und andere Sätze zu bestätigen.

85. Um nun auch für diesen Satz einen Beweis mitzutheilen, wie es oben für jeden Gegenstand in Aussicht gestellt worden ist (18), so will ich den folgenden versuchen, welchen der Satz zuzulassen scheint. Sei AB ein Flächenstück des leuchtenden Körpers, [43] und möge jedes Theilchen dieses Stückes nach allen Seiten hin Licht ausbreiten. Wie man sich nun auch die Ausstrahlung des Lichtes vorstellen mag, so wird man doch zugeben müssen, dass sich die einzelnen Theilchen des leuchtenden Körpers in einer beständigen Erregung befinden, sodass ein Theilchen C von allen ihm benachbarten angestossen wird und umgekehrt selbst die ersteren antreibt. Da man aber annimmt, dass ersteres sich auf der Oberfläche befinde, so leuchtet für sich ein, dass die letzteren auf einer Halbkugel um das erstere gelegen sind. Das Theilchen wird deshalb die Bewegung oder das Licht nach der anderen Halbkugel hin ausbreiten. Nun ist zu beweisen, dass die Lichtmenge, welche längs CF ausgesandt wird, sich zu derjenigen, welche längs der Richtung CG normal ausgestrahlt wird, verhält wie der Sinus des Emanationswinkels FCB zur

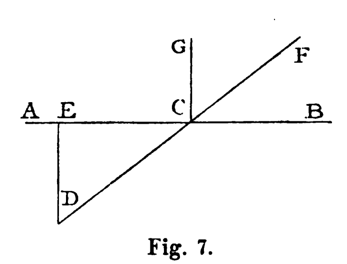


Fig. 7.

Einheit. Hierzu nehmen wir an, dass die Kraft, durch welche das Licht längs *CF* ausgestossen wird, von denjenigen Theilchen herrührt, welche auf der Geraden *DC* liegen. Diese Kraft sei $= DC$. Man zerlege sie in die normale Componente *DE* und die parallele *EC*; letztere trägt zur Aussendung des Lichts nichts bei, dieselbe kommt daher allein durch die Kraft *DE* zu Stande. Es verhält sich aber *DE* wie der Sinus des Emanationswinkels, also wird die Kraft in diesem Verhältniss abnehmen. Betrachtet man also das ausgesandte Licht als die Wirkung und nimmt an, dass dieselbe der Ursache proportional sei, so folgt, dass die Menge des schief austretenden Lichtes sich verhält, wie der Sinus des Winkels, unter welchem es austritt.

86. Auf diese oder eine ähnliche Weise wird man die Sache auffassen müssen. Wenn man die *Newton*'sche Annahme macht, dass mit dem Licht zugleich Theilchen des leuchtenden Körpers ausströmen, so wird man sich jedenfalls eines ähnlichen Beweises bedienen. Je kleiner nämlich die Kraft *DE* ist, vermöge deren die Theilchen fortgetrieben werden, um so kleiner wird die Anzahl der Theilchen sein, welche [**44**] zugleich ausgestossen werden. Denn die Geschwindigkeit, mit welcher sie sich längs der Geraden *CF* bewegen, muss dieselbe sein für jeden beliebigen Emanationswinkel. Es wird uns übrigens gleichgiltig sein, auf welche Weise unser Satz bewiesen wird, da es genügt, ihn aus den Beobachtungen abgeleitet zu haben; wir werden uns also bei dieser Untersuchung nicht länger aufhalten und uns jetzt die Aufgabe stellen, die höchst eleganten Lehrsätze, zu welchen dieser Satz uns hinführt, klar auseinander zu setzen.

87. **Lehrsatz 1.** *Die Lichtmenge, welche aus einem beliebigen unendlich kleinen Theilchen der leuchtenden Fläche nach einem gegebenen Punkt hin oder nach einem gegebenen Flächenstück ausgesandt wird, ist ebenso gross als ob sie von dem ebenso stark leuchtenden normalen Flächenstück AD ausginge.*

Beweis. In beiden Fällen steht nämlich die Beleuchtung im zusammengesetzten Verhältniss der Grösse des leuchtenden Flächenstücks und des Sinus des Emanationswinkels (52, 81). In der ersten Hinsicht wird sich deshalb die normale Beleuchtung zur

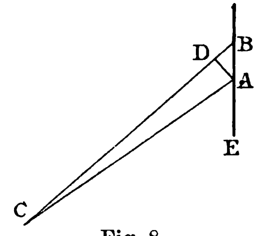


Fig. 8.

schiefwinkeligen verhalten wie DA zu AB, in zweiter Hinsicht aber wie die Einheit zum Sinus des Emanationswinkels CBE, also wie AB zu DA, oder umgekehrt wie die Flächenstücke. Da sich also diese Verhältnisse gegenseitig aufheben, so folgt der Lehrsatz.

88. **Lehrsatz 2.** *Die Lichtmenge, welche von dem Flächenstück $ABCD$ aus nach P gelangt, ist ebenso gross, als ob sie von dem Flächenstück $abcd$ käme, welches dem ersteren parallel ist, durch dieselben Seiten der Pyramide $PABCD$ ausgeschnitten wird und dieselbe Intensität besitzt.*

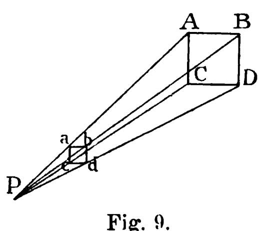


Fig. 9.

[45] Beweis. In beiden Fällen steht nämlich die Beleuchtung im directen Verhältniss wie das Flächenstück und ist umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung (52, 48), da man denselben Emanations- und Incidenzwinkel annimmt. Es verhalten sich aber die Flächenstücke direct wie das Quadrat der Entfernung, und deshalb heben sich auch hier diese beiden Verhältnisse auf. Die Beleuchtung ist folglich in beiden Fällen gleich.

89. **Lehrsatz 3.** *Wenn $ABCD$ das leuchtende Flächenstück ist, welches das ebene Element in P beleuchtet, und wenn $abcd$ ein anderes Flächenstück ist, welches gegen das erste beliebig geneigt ist, aber durch dieselben Seiten der Pyramide $PABCD$ ausgeschnitten wird, so ist in beiden Fällen die Beleuchtung dieselbe.*

Beweis. 1) Man stelle sich beide Flächenelemente als unendlich klein vor, und denke sich durch CD gehend ein drittes Flächenstück, welches dem zweiten $abcd$ parallel ist und durch dieselbe Pyramide ausgeschnitten wird, so folgt nach Lehrsatz 1, dass beide das Element in P gleich stark erleuchten werden. Aber nach Lehrsatz 2 wird die von diesem dritten Flächenstück kommende Beleuchtung dieselbe sein wie die, welche vom Flächenstück $abcd$ kommt. Also werden beide

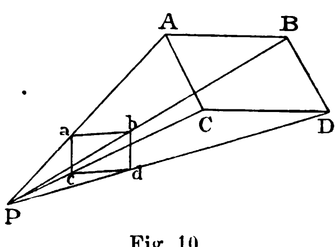


Fig. 10.

Flächenstücke $ABCD$ und $abcd$ das Element in P gleich stark erleuchten. Denn da man beide als unendlich klein annimmt, so wird auch der Incidenzwinkel gleich sein, da auch das Ebenenstück in P als unendlich klein angesehen wird.

2) Wenn nun diese Flächenstücke nicht unendlich klein sind, so steht nichts im Wege, die Pyramide in unendlich viele kleine Pyramiden zu zerlegen, und [**46**] dann gilt offenbar das Bewiesene für eine jede derselben. Da also von jedem Element der Oberfläche $ABCD$ dieselbe Beleuchtung hervorgerufen wird, wie vom entsprechenden Element auf der Oberfläche $abcd$, so folgt, dass die gesammte Beleuchtung in beiden Fällen gleich der Summe dieser Beleuchtungen ist, welche unendlich klein und paarweise gleich sind, und deshalb ist die Beleuchtung offenbar in beiden Fällen gleich.

90. **Lehrsatz 4.** *Wenn beide Flächen $ABCD$ und $abcd$ beliebig gekrümmt sind, und wenn zugleich beide mit gleicher Intensität leuchten und von den Seiten derselben Pyramiden ausgeschnitten werden, so wird das Element in P von beiden gleich stark beleuchtet.*

Beweis. Man denke sich die Pyramide $PABCD$ wieder in unzählige unendlich kleine Pyramiden zerlegt, welche ihren gemeinsamen Scheitel in P haben; dann folgt aus dem vorigen Satz (89, 1)), dass die Behauptung für jede einzelne gilt; und deshalb muss sie auch für die Summe derselben gelten.

91. *Man kann also derartige Flächen durch das Segment einer Kugeloberfläche ersetzen, welches von den Seiten derselben Pyramide ausgeschnitten wird und mit derselben Intensität leuchtet. Man wird dann dieselbe Stärke der Beleuchtung erhalten.*

92. *Die Grösse des Durchmessers dieser Kugel ist gleichgiltig.* Das Element P braucht sich auch nicht im Centrum der Kugel zu befinden, wenn nur das fragliche Segment die Pyramidenseiten nicht durchdringt, sondern von ihnen begrenzt wird.

93. *Wenn die Fläche $ABCD$ unendlich gross wird und dem Element in P parallel bleibt, so geht das Kugelsegment,* [**47**] *welches man an ihre Stelle setzen kann, in eine Halbkugel über.* Daher erhält man in beiden Fällen dieselbe Stärke der Beleuchtung.

94. *Dasselbe findet statt, wenn das Flächenstück $ABCD$ dem Element P unendlich nahe gerückt wird.* Denn das letztere wird ebenso beleuchtet werden, als geschähe dies durch

eine mit derselben Intensität leuchtende Halbkugel von beliebigem Durchmesser.

95. In allen diesen Fällen wird also nur die Bedingung erfordert, dass die Fläche *abcd*, welche an Stelle der gegebenen Fläche gesetzt wird, durch die Seiten derselben Pyramide ausgeschnitten wird, und unter dieser Voraussetzung kann die Distanz der Fläche beliebig sein. Daraus folgt, *dass jede Beleuchtung, obwohl sie durch die Grösse, Entfernung und Lage der leuchtenden Fläche bestimmt wird, in einfacher Weise auf die scheinbare Grösse zurückgeführt werden kann.* Denn diese wird durch die Gestalt der Pyramide bestimmt, auf welche alles andere reducirt wurde.

96. Man hat nämlich gesehen (87), dass die schiefe Lage der Fläche durch die normale oder eine beliebige andere ersetzt werden kann, wenn nur die Begrenzung durch die Seiten derselben Pyramide gebildet wird. Unter dieser Voraussetzung wurde weiter geschlossen, dass eine beliebige Entfernung auf eine beliebige andere in der Weise zurückgeführt werden kann (88, 89), dass bei gleichbleibender Gestalt und Lage der Pyramide gegenüber dem Element in P auch die Beleuchtung dieselbe bleibt. Denn es müsste im ersten Falle die Fläche AB Fig. 8, da sie grösser ist als die Fläche AD, auch eine grössere Wirkung hervorbringen, wenn nicht zugleich wegen des kleineren Emanationswinkels ABD die Menge der austretenden Strahlen eine geringere würde. Ebenso wird im zweiten Falle, Fig. 9, die von der Fläche $abcd$ ausgehende Beleuchtung wegen des verkleinerten Flächenraumes eine geringere, aber sie wird in Folge der grösseren Nähe wieder vergrössert. Da sich also in [**48**] beiden Fällen die entgegengesetzten Wirkungen einander aufheben, so war es möglich, diese eleganten Sätze aufzustellen, die wir im Folgenden mit grossem Vortheil für die Rechnung in Anwendung bringen werden.

97. Da also Entfernung, Grösse und Lage des leuchtenden Gegenstandes einzig auf die scheinbare Grösse desselben reducirt sind, so folgt: *In jedem beliebigen Falle hängt die Beleuchtung nur ab: 1. vom Einfallswinkel, 2. von der scheinbaren Grösse der Lichtquelle, 3. von der Intensität oder Helligkeit derselben.*

98. Die scheinbare Grösse ist der körperliche Winkel, welcher durch die Seiten einer beliebigen Pyramide oder eines Kegels begrenzt wird und dessen Grösse also gemessen wird durch das Segment einer Kugelfläche, welches durch die Seiten

derselben Pyramide ausgeschnitten wird. Die Spitze der Pyramide fällt in das Centrum dieser Kugel, und dort nimmt man auch das beleuchtete Flächenstück an, welches man hier als Punkt betrachtet. Auf diese Weise wird in jedem Falle die Leuchtkraft der einfallenden Strahlen bestimmt (68). *Denn wenn diese Grösse durch den Inhalt des erleuchteten Elementes dividirt wird, so ergibt sich die Beleuchtung oder Helligkeit des Elements.*

99. Die Berechnung der Beleuchtung ist also auf diejenige der sphärischen Segmente reducirt, und da die Grösse des Durchmessers gleichgiltig ist (92, 98), so werden wir den Halbmesser oder Radius der Kugel im Folgenden stets durch die Einheit ausdrücken.

100. Da ferner die Beleuchtung eines beliebigen Elementes ihr Maximum erreicht, wenn sie von einer Halbkugel ausgeht, weil in diesem Fall von allen Seiten, woher Strahlen einfallen können, in der That auch solche einfallen, so werden wir diese von der Halbkugel ausgehende Beleuchtung [**49**] schlechthin als die *absolute Beleuchtung* bezeichnen. Man hat gesehen, dass eine solche stattfindet, 1) wenn das beleuchtete Element an der Oberfläche des leuchtenden Körpers liegt oder dieselbe berührt, (94) 2) wenn die beleuchtete Fläche das beleuchtete Element allseitig umgibt oder umhüllt, ähnlich wie der Himmel ein Oberflächenstück der Erde umgiebt, 3) wenn die leuchtende Fläche unendlich gross und dem Element parallel ist (93). In diesen einzelnen Fällen findet, wenn alle Theile der leuchtenden Fläche ihre Helle beibehalten, dieselbe Beleuchtung statt, und zwar die Maximal- oder die absolute Beleuchtung.

101. Hieraus folgt von selbst der folgende sehr elegante Satz: *Wenn der ganze Himmel, so weit er dem Auge sichtbar ist, mit derselben Helligkeit leuchten würde, wie die Sonne in ihrem erhabenen Glanze, so würde die Oberfläche der Erde ebenso beleuchtet, als ob sie sich an der Oberfläche der Sonne selbst befände.* Hierdurch sieht man deutlich ein, welche Einbusse die Leuchtkraft der Sonne oder die Helligkeit der irdischen Objecte infolge der ungeheuren Entfernung der Sonne erleidet. Man darf jedoch nicht sogleich folgern, dass die absolute Beleuchtung sich zur thatsächlich stattfindenden so verhalte, wie der Inhalt der hellen Himmelskugel, die wir sehen, zur scheinbaren Grösse der Sonnenscheibe verhält. Diesen Fehlschluss hat *Smith* in seinem vorzüglichen systematischen Werk über Optik begangen bei der Gelegenheit, wo er die Hel-

ligkeit der Sonne und des Mondes vergleichen will. Wir werden aber unten sehen, dass dem ausgezeichneten Mann hier ein Fehler untergelaufen ist, und dies leuchtet auch sofort ein, denn man muss, wenn man einen solchen Schluss machen will, auf die Verschiedenheit der Einfallswinkel Rücksicht nehmen. [**50**] Denn wenn ein Element durch eine Halbkugel erleuchtet wird, so kommen alle Einfallswinkel zugleich vor. Dies verhält sich aber anders, wenn die Beleuchtung nur von einem sphärischen Segment kommt, wie ein solches in diesem Fall die Sonnenscheibe darstellt. Man wird bald sehen, dass aus diesem Grunde dieses Verhältniss um die Hälfte kleiner wird. Uebrigens hat der eben genannte Autor den in Rede stehenden Satz nur auf den Vollmond angewendet und man wird sehen, dass er, unbeschadet des daraus gezogenen Schlusses, hierauf eben so gut wie auf die Sonne anwendbar ist.

102. Nach diesen Vorbereitungen werden wir die einzelnen Fälle rechnerisch verfolgen und hierzu werden diese Grundlagen vollkommen genügen. Man hat gesehen, dass jeder leuchtende Gegenstand durch einen Kugelabschnitt ersetzt werden kann, welcher dieselbe scheinbare Grösse hat. Zu diesem Zweck ist die Gestalt und die scheinbare Grösse der leuchtenden Gegenstände in Betrachtung zu ziehen. Die verschiedenen Modificationen der Beleuchtung, soweit sie von der Gestalt abhängen, werden wir auf drei sehr allgemeine Fälle reducieren: 1) wir werden den Rand des Körpers, soweit derselbe dem Auge zugewandt ist, als kreisförmig annehmen; in diesem Fall ist der Kugelabschnitt kreisförmig und wird begrenzt durch einen grössten oder einen kleinen Kugelkreis. Hierher kann man die Hemisphäre des Himmels, die Sonne, den Vollmond rechnen, u.s.w. 2) Wir werden annehmen, der Rand des leuchtenden Körpers sei durch gerade Linien begrenzt. In diesem Fall wird der Abschnitt der Kugelfläche durch grösste Kugelkreise begrenzt werden, und entweder ein sphärisches Dreieck vorstellen, wie man sie in der sphärischen Trigonometrie berechnet, oder ein Vieleck, welches aus solchen Dreiecken zusammengesetzt ist. [**51**] Hierher gehört die Himmelsfläche, wenn sie durch die Fenster der Häuser oder andere geradlinige Oeffnungen betrachtet wird. 3) Es gibt unendlich viele Fälle, in welchen der scheinbare Rand der Lichtquelle weder kreisförmig noch geradlinig ist, sondern entweder durch eine beliebige andere Curve gebildet wird oder eine Figur hat, welche aus verschiedenen Curven zusammengesetzt ist. Zu dieser letzten Klasse kann man die

sichelförmige Mondgestalt rechnen, den Himmel, wenn er zum Theil durch die Gestalten von Häusern oder von Bergen verdeckt ist, u. s. w.

103. In jedem dieser Fälle ist die Gestalt des leuchtenden Körpers so zu nehmen, wie sie sich dem Auge, wenn es sich an der Stelle des erleuchteten Punktes befindet, darbietet. Um ferner auf die Einfallswinkel Rücksicht zu nehmen, werden wir die erleuchtete Fläche unendlich klein setzen. Denn auf diese Weise kann man die Beleuchtung für jeden Punkt der beleuchteten Ebene bestimmen. Endlich ist hier ein ähnlicher Begriff zu betrachten wie der in allen Schriften über Optik vorkommende Begriff des *Lichtkegels*, dessen Spitze der leuchtende Punkt ist; jetzt aber soll die Lage die umgekehrte sein und die Spitze sich im erleuchteten Element befinden. Der Unterscheidung wegen werden wir den ersteren als *divergenten Strahlenkegel*, den letzteren als *convergenten Strahlenkegel* bezeichnen (67, 68). Jeder von beiden geht in eine Pyramide oder einen anderen zugespitzten Körper über, sobald der scheinbare Rand entweder der erleuchteten Ebene oder des leuchtenden Körpers von geraden Linien oder beliebigen Curven begrenzt wird.

104. Ein solcher Körper sei, Fig. 10, die Pyramide $PABCD$. Wenn die Basis derselben von dem leuchtenden Punkte P beleuchtet wird, so gehen offenbar alle dort auffallenden Strahlen von diesem Punkte aus, [**52**] sind also divergent. Es findet also der erste Fall statt und man hat eine *divergente Strahlenpyramide*. Nimmt man umgekehrt die Basis $ABCD$ als leuchtende Fläche an, welche den Punkt P, der auf irgend einer Ebene liege, beleuchten möge, so fallen offenbar von jedem beliebigen Punkte der Fläche $ABCD$ aus die Strahlen auf den Punkt P. Wenn dies stattfindet, muss man von einer *convergenten Strahlenpyramide* reden. In beiden Fällen heisst sie *Strahlenpyramide*, weil sie nur aus Lichtstrahlen zusammengesetzt ist, welche alle entweder vom Scheitel P ausgehen, oder auf diesen hinzielen.

105. Da der Punkt P immer als ein unendlich kleiner Theil einer Fläche angesehen wird, so ist es offenbar nicht gleichgiltig, wie die Pyramide dagegen geneigt ist. Denn wenn sich die Neigung ändert, so werden auch die Emanations- oder Incidenzwinkel, und also auch die Menge und Dichtigkeit der Strahlen sich ändern. Wenn aber die Fläche $ABCD$ senkrecht über P steht oder sich von dieser Lage nur wenig entfernt, so leuchtet für sich ein, dass dann die Menge der Strahlen

grösser sein wird als dann, wenn eine grössere Neigung stattfindet.

106. Hält man also diesen Begriff des Strahlenkegels oder der Strahlenpyramide fest, so kann man offenbar beide Fälle mit derselben Rechnung erledigen, weil man in beiden Rücksicht nehmen muss auf Emanations- und Incidenzwinkel, die Leuchtkraft und die Beleuchtung, die Basis $ABCD$ und das Element der Ebene oder Fläche in P. Und da ferner die Menge der Strahlen abnimmt im zusammengesetzten Verhältniss der Sinus der Emanations- und Incidenzwinkel, so ist diese Analogie offenbar in jeder Hinsicht vollständig, [53] und es ist nichts leichter als diese Substitution, wenn man diese Ausdrücke in gehöriger Weise mit den entgegengesetzten vertauscht. Wir kommen aber nunmehr zu speciellen Fällen und wollen zunächst denjenigen entwickeln, dass der scheinbare Rand des leuchtenden Körpers kreisförmig ist; und um vom einfachen zum zusammengesetzten überzugehen, wollen wir annehmen, dass diese leuchtende Kreisfläche sich senkrecht über dem beleuchteten Element befinde. In diesem Fall steht also der convergente Strahlenkegel senkrecht über demselben.

107. Es stelle also ADB eine Halbkugel dar, dieselbe stehe senkrecht über der Ebene AB und im Centrum C befinde sich das zu erleuchtende unendlich kleine Stück dieser Ebene. Auf dieses mögen die Strahlen vom Kugelsegment MDS aus, welches man an Stelle der Lichtquelle setzen kann, durch den Kegel MCS auffallen (91, 102). Vom Centrum C aus ziehe man normal den Kugelradius CD; ferner ziehe man MS und, demselben unendlich nahe, ms, dann wird die Fläche $MSsm$ eine unendlich schmale Kugelzone darstellen. Es werde nun die Zunahme der Beleuchtung gesucht, welche dieser Zone entspricht. Da diese Zone der Ebene AB parallel ist und deren Normale CD zur Axe hat, so ist offenbar der Einfallswinkel aller Strahlen $= MCA$ und der Sinus desselben $= PM = CQ$. Nun verhält sich aber die Fläche der Zone, welcher die Menge der in C einfallenden Strahlen proportional ist, wie das auf der Axe abgeschnittene Stück Qq. Daher wird sich die Beleuchtung verhalten wie das Product von Qq und dem Sinus

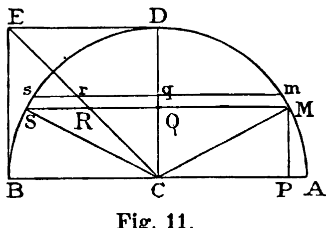


Fig. 11.

des Einfallswinkels CQ. Man construire das Quadrat $CDEB$ und ziehe die Diagonale CE; dann wird $QR = CQ$ und es wird das fragliche Product $CQ \,.\, Qq$ = dem Trapez $QRrq$. Daher kann die gesuchte Zunahme der Beleuchtung durch den Flächenraum $QRrq$ ausgedrückt werden. [54] Und da jeder Zone ein solcher Raum im Dreieck CDE entspricht, so ist klar, dass die Beleuchtung, welche von der Summe der Zonen, d. h. von dem Segment MDS herrührt, ausgedrückt wird durch die Summe der Flächenräume, also durch das Viereck $QRED$. *Bei jedem beliebigen sphärischen Segment MDS ziehe man also nur die Gerade MS, so wird die demselben entsprechende Beleuchtung durch den Raum $QRED$ dargestellt und sie verhält sich zur absoluten Beleuchtung, welche der ganzen Halbkugel entspricht, wie dieses Flächenstück $QRED$ zum ganzen Dreieck CDE* (100). Dieser Satz wird noch eleganter auf folgende Weise:

108. Da CE die Diagonale eines Quadrats ist, dessen Seite dem Halbmesser oder Radius einer Kugel gleich ist, so ist der Flächeninhalt des Dreiecks CDE gleich dem halben Quadrat des Radius. Aber der Inhalt des Dreieckes CQR ist gleich der Hälfte des Quadrats der Seite CQ, oder, was dasselbe ist, dem halben Quadrat des Cosinus des Winkels DCS, und wenn man dieses vom vorigen abzieht, so bleibt das Flächenstück $QRED$, welches dem halben Quadrat des Sinus desselben Winkels gleich ist. Dieser Winkel DCS ist aber der scheinbare Halbmesser der Lichtquelle. Daher gewinnt man, wenn man alles mit 2 multiplicirt, den folgenden

109. **Lehrsatz 5.** *Wenn ein leuchtender Gegenstand, dessen scheinbarer Rand kreisförmig ist, senkrecht steht über dem Element, so verhält sich die daraus entspringende Beleuchtung zur absoluten Beleuchtung, wie das Quadrat des Sinus des scheinbaren Halbmessers zur Einheit.*

110. *Euler* leitet in seiner oben (71) citirten Schrift eben denselben Satz aus seinen Principien ab, obgleich dieselben von den hier benutzten verschieden sind. Der Grund für diese unerwartete Uebereinstimmung [55] ist in der kreisförmigen Figur zu suchen. Nimmt man nämlich eine andere Figur, so verschwindet diese Uebereinstimmung sofort. Diese Rechnungserscheinung, wie man es nennen kann, welche aus der kreisförmigen und sphärischen Figur entspringt, wird unten noch in zwei anderen Fällen vorkommen.

111. Da also die absolute Beleuchtung durch das Quadrat

des Radius des Kreises ausgedrückt wird und da dieselbe als Maass dienen kann, um die anderen zu bestimmen, so werden wir sie beständig zur Einheit nehmen, wenn es nicht ausdrücklich anders gesagt wird. Denn diese Einheit hängt bisher einzig von der Helligkeit der Lichtquelle ab, durch welche ein beliebiges Element erleuchtet wird. Daher ist bei gleichbleibender Leuchtkraft diese Einheit constant. Deshalb braucht man um so weniger von ihr abzugehen, da wir auch die Sinus der Winkel in derselben ausdrücken.

112. Da sich also die Beleuchtung wie das Quadrat des Sinus des scheinbaren Halbmessers verhält, so folgt sofort, dass es, wie oben angedeutet wurde (101), falsch ist, zu schliessen, die absolute Beleuchtung stehe zu einer solchen, welche hervorgebracht wird durch eine Lichtquelle, deren scheinbare Figur durch einen kleinen Kugelkreis begrenzt wird, in demselben Verhältniss, wie die halbe Kugeloberfläche zum Flächeninhalt des scheinbaren Kreises. Denn dieses würde das Verhältniss der Einheit zum doppelten Quadrat des Sinus des halben scheinbaren Halbmessers sein. Das Verhältniss soll aber so sein, wie sich die Einheit zum Quadrat des scheinbaren Halbmessers verhält. Das letztere Verhältniss ist aber für ein kleineres Kugelsegment, wie z. B. die Sonnenscheibe, nur halb so gross als das erstere.

113. Aus dem Gesagten folgt nun ein anderer nicht weniger eleganter Satz, den man überall vorfindet, aber nicht als bewiesen, sondern gleichsam als geschenkt hingenommen. [**56**] Er bezieht sich auf eine Lichtquelle, deren Gestalt kugelförmig ist, wie die Sonne, der Mond und die Planeten. Es leuchtet an sich ein, dass die scheinbare Scheibe eines solchen Körpers kreisförmig ist, daher wird sich jedenfalls die Beleuchtung des Elements, welches ihr senkrecht gegenübersteht, verhalten wie das Quadrat des Sinus des scheinbaren Halbmessers (109).

114. Es sei CB der Halbmesser der Sonne oder eines anderen kugelförmigen Körpers. Von seinem Centrum aus gehe die Axe CAE, auf welcher sich das beleuchtete Element E befinde. Von diesem Punkte aus ziehe man die Gerade ED, welche die Oberfläche der Lichtquelle oder den Kreis BDA be-

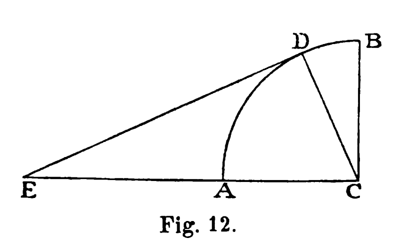


Fig. 12.

rührt, und auf diese Gerade fälle man vom Centrum C aus die Normale CD. Dann ist EC die Entfernung des Elements E vom Centrum, und der Winkel DEC ist der scheinbare Halbmesser des leuchtenden Körpers, während CD der wahre ist. Sieht man nun CE als Einheit an, so ist CD der Sinus des Winkels CED oder des scheinbaren Halbmessers, und daher wird sich die Einheit zum Sinus des scheinbaren Halbmessers verhalten, wie die Entfernung EC des Centrums zum wahren Halbmesser CD. Es verhält sich also der Sinus des scheinbaren Halbmessers umgekehrt wie die Distanz EC. Deshalb verhält sich sein Quadrat umgekehrt wie das Quadrat der Entfernung des Centrums. Nun verhält sich das Quadrat des scheinbaren Halbmessers wie die Beleuchtung des Elementes in E. Hieraus ergiebt sich also der folgende

115. **Lehrsatz 6.** *Ist der leuchtende Körper kugelförmig, so verhält sich die absolute Beleuchtung in A zu einer beliebigen normalen in E, wie das Quadrat der Distanz CE zum Quadrat des Halbmessers CA des Körpers, also umgekehrt wie das quadratische Verhältniss der Entfernung des Elementes E vom Centrum C des Körpers.*

[**57**] 116. Wie wir also die absolute Beleuchtung als die Einheit bezeichnet haben (111), so werden wir auch den Halbmesser CA durch dieselbe ausdrücken. Denn dann erhält man die Stärke jeder anderen Beleuchtung, wenn man die Einheit durch das Quadrat der Entfernung des Gegenstandes vom Centrum C dividirt. Hieran knüpfen sich noch einige Bemerkungen.

117. Zunächst ist hieraus klar, dass für Kugeln der Satz streng giltig ist, welchen *Wolf*, *Thümmig* und sehr viele andere bisher nur als annähernd richtig ausgesprochen haben, sofern man nämlich den scheinbaren Halbmesser wegen seiner Kleinheit vernachlässigen könne. Denn sie erkannten richtig, dass dann, wenn der scheinbare Halbmesser eine merkliche Grösse hat, auch die Differenz sowohl zwischen den Entfernungen der einzelnen Punkte der Oberfläche AD, als auch zwischen den Incidenzwinkeln der von diesen Punkten ausgehenden Strahlen merklich wird. Ueber eine dritte Differenz, diejenige nämlich, welche zwischen den Emanationswinkeln besteht, findet man, *Euler* ausgenommen, auch nicht ein Wort. Man hat nämlich diese Unterschiede nicht in Rechnung gezogen, weil man meinte, dass dadurch die Eleganz des Satzes gestört werden würde. Wir haben aber gesehen, dass durch die Rücksicht auf dieselben dieser elegante Satz nicht beeinträchtigt wird,

sobald man den leuchtenden Körper als kugelförmig annimmt, wie z. B. die Sonne, deren Leuchtkraft *Thümmig* in seinen *Meletemata varii argumenti* rechnerisch verfolgt hat. In dieser Beziehung ist daher alles das streng richtig, was er bezüglich der Beleuchtung der Planeten als nur annähernd richtig bewiesen hat.

[**58**] 118. Wie erwähnt, macht der geistreiche *Euler* hier eine Ausnahme. In seiner oben mehrfach erwähnten Schrift (71, 72) hat er nämlich auf diese Unterschiede Rücksicht genommen. Nachdem er aber unsern fünften Lehrsatz (109), welcher sich auf kugelförmige Körper bezieht, bewiesen hat, ist merkwürdigerweise dieser sechste (116), welcher ohne Weiteres daraus hervorgeht, seinem Scharfsinn entgangen. Vielleicht hat er aber, um zu wichtigeren Dingen überzugehen, geglaubt, hierbei nicht länger verweilen zu dürfen. Uebrigens wurde schon erwähnt, dass in einigen wenigen Fällen der *Euler*'sche Calcul mit dem unsrigen übereinstimmt (110).

119. Aus dem Gesagten erhellt ferner sofort, warum man die Entfernung vom Centrum nicht kleiner annehmen kann, als den Halbmesser. Denn wenn man das Element E allmählich näher heranrücken lässt, so vermehrt sich die Beleuchtung in der Weise, dass sie dann, wenn E nach A gelangt ist, zur Maximal- oder absoluten Beleuchtung wird, die der grössten scheinbaren Grösse entspricht, da ein beliebiger Sinus nicht grösser als die Einheit werden kann.

120. Bisher wurde auseinandergesetzt, welche Beleuchtung im einfachsten Fall stattfindet, nämlich wenn der scheinbare Rand des leuchtenden Körpers ein Kreis ist und wenn sich derselbe senkrecht über dem beleuchteten Element befindet, wo also der Lichtkegel der einfallenden Strahlen senkrecht steht auf demselben. Man könnte nun, nachdem dies erledigt ist, zu anderen Fällen übergehen. Da aber diese so complicirt sind, dass sie sich nur mühsam, und zwar durch Rechnung verfolgen lassen, so wird es nicht ohne Nutzen sein, zu sehen, wie man auch diesen einfacheren Fall rechnerisch behandeln kann. Wir werden dann ein Mittel finden, die Lichtkegel [**59**] beider Art (103, 104) mit einander zu vergleichen.

121. Wir kehren also zu Fig. 11 zurück, und es sei alles so wie in § 107. Der Radius CA sei $= 1$, der Winkel $MCD = v$, $mM = dv$, $MP = \cos v$, $MQ = \sin v =$ dem Halbmesser der Zone $MSsm$. Das Verhältniss des Durchmessers zur Peripherie soll hier, wie auch im ganzen Werke, mit $1 : \pi$

bezeichnet werden, sodass also, wenn man den Durchmesser $= 1$ setzt, die Peripherie $= \pi = 3.1415927$ wird. Dann wird der Flächeninhalt der Zone $MSsm = 2\pi \sin v\, dv$, und dieser Grösse ist die Menge der nach allen Seiten austretenden Strahlen proportional. Wenn diese aber auf ein gegebenes Element auffallen, so verhält sich ihre Menge wie der Sinus des Incidenzwinkels, deshalb wird die Beleuchtung in C, welche von den Strahlen der Zone $MSsm$ ausgeht, $= 2\pi \sin v \cos v\, dv$ $= 2\pi \sin v\, d \sin v$. Durch Integration wird also die Beleuchtung, welche dem ganzen Segment MDS entspricht, $= \pi \sin^2 v$. Daraus folgt ohne weiteres der Lehrsatz 5 (109), da der Winkel v der scheinbare Halbmesser des Gegenstandes ist.

122. Auf diese Weise haben wir die Intensität der Beleuchtung in C gefunden, welche $= \pi \sin^2 v$ ist. Sucht man aber die Quantität der Beleuchtung, so muss man das Product nehmen von $\pi \sin^2 v$ und dem Flächeninhalt des beleuchteten Elementes C. Es giebt nämlich $\pi \sin^2 v$ die Menge der Strahlen an, welche auf die Einheit des Flächenraumes auffallen, d. h. also die Dichtigkeit (44) derselben, von welcher die Helligkeit des beleuchteten Elementes abhängt.

123. Wenn $v = 90^\circ$ ist, so wird $\sin v = 1$ und die absolute Beleuchtung wird $= \pi$. Dieselbe wurde zwar [60] oben (111) durch die Einheit ausgedrückt, jedoch muss man hier den Werth π anwenden, wenn man die Kegel der divergirenden und convergirenden Strahlen gegenseitig vergleichen will. Wir fassen diese Aufgabe, indem wir den bisher entwickelten Fall umkehren (106), in folgender Weise an.

124. Sei C ein unendlich kleiner Theil der leuchtenden Oberfläche; seinen scheinbaren Halbmesser, wie er von D aus gesehen wird, drücken wir durch z aus, und an Stelle dieser Grösse kann man, da sie unendlich klein ist, hier ihren Sinus setzen; ferner betrachte man in D ein unendlich kleines Segment der Kugel, welche um C beschrieben ist; sein Halbmesser und Sinus heisse ζ. Dann ist offenbar die Fläche des Kreises $C = \pi z^2$, des Segmentes D aber $\pi \zeta^2$; also ist die Intensität der Beleuchtung in D, welche von dem Element C herrührt $= \pi z^2$ und ihre Menge $= \pi^2 z^2 \zeta^2$. *Es wird nun die Menge der Strahlen gesucht, welche sich vom Element C aus über die ganze Halbkugel oder durch einen beliebigen Strahlenkegel MCS verbreiten.*

125. Die Menge der austretenden Strahlen hängt ab: 1) von der Helligkeit des Elements C, da diese dessen wirkliche Hellig-

keit oder die Intensität seines Lichts bestimmt (36, 39), 2) vom Flächenraum desselben, weil sich mit ihm die Menge der auf ein und dasselbe Flächenstück auffallenden Strahlen vergrössert oder verkleinert (38, 52), 3) endlich vom Emanationswinkel, da die Beleuchtung und die Menge der schief austretenden Strahlen sich ebenso vermindert wie der Sinus dieses Winkels (81). Die Leuchtkraft nennen wir hier $= 1$, da sie in die vorliegende Rechnung nicht eingeht. Den Flächenraum des Kreises C haben wir $z^2 \pi$ genannt, [61] und wenn man den Winkel MCD mit v bezeichnet, so wird der Sinus des Emanationswinkels $= \cos v$, also wird die Menge der Strahlen, welche unter dem Winkel MCA nach der Zone $MSsm$ hin ausgestrahlt wird, $= 2\pi^2 z^2 \cos v \sin v \, dv$, also gleich dem Product der Kreisfläche C, der Zone $MSsm$ und des Sinus des Emanationswinkels. Durch Integration findet man also die Menge der Strahlen, welche durch den Lichtkegel MCS divergiren, $= \pi^2 z^2 \sin^2 v$. *Sie wächst also wie das Product des Flächenraums des unendlich kleinen Kreises und der Basis des Lichtkegels, dessen Durchmesser MS ist.* Es ist nämlich πz^2 der Inhalt des unendlich kleinen Kreises C und $\pi \sin^2 v$ der Flächeninhalt der Basis des Kegels MCS, dessen Seite $MC = 1$ ist. Hieraus folgt also der elegante

126. **Lehrsatz 7.** *Sei MCcS ein Kegel, dessen Axe CE auf der Grundfläche MS senkrecht steht, und welcher so abgestumpft ist, dass die Schnittfläche Cc unendlich klein und zur Axe normal ist. Setzt man dann die Seite CM = 1, so ist die Menge der Lichtstrahlen, welche die leuchtende Schnittfläche Cc durch den Kegel auf die Grundfläche verbreitet, gleich dem Product aus der Schnittfläche Cc und dem Inhalt der Basis MS.*

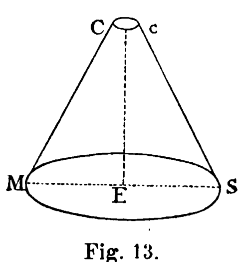


Fig. 13.

127. Diesem Satze, welcher sich auf die divergirenden Strahlen bezieht, ist der folgende analog:

128. **Lehrsatz 8.** *Denkt man sich die Basis MS des Kegels als leuchtend, so ist die Menge der Strahlen, welche auf die unendlich kleine Schnittfläche Cc auffällt, gleich dem Product aus dem Inhalt der Schnittfläche Cc und dem Inhalt der leuchtenden Grundfläche MS. Setzt man also in beiden Fällen die Leuchtkraft gleich, so ist diese Lichtmenge gleich.*

[62] 129. Eines Beweises bedarf dieser Satz nicht, da er aus § 121 deutlich hervorgeht. Denn man hat oben (91) gesehen, dass die Basis MS durch die Calotte einer Kugel ersetzt werden kann, welche CM als Radius und MS als Sehne hat. Uebrigens wird durch die Vergleichung beider vorstehenden Sätze dasjenige illustrirt, was über die Vergleichung der austretenden und einfallenden Strahlen früher (106) bemerkt worden ist. Denn wenn man in beiden Fällen die Helligkeit der leuchtenden Flächen gleichsetzt, so ist die Menge der Strahlen, welche auf die entgegengesetzte Fläche einfallen, beidemale dieselbe. Dagegen ist die Helligkeit der beleuchteten Flächen sehr verschieden. Denn diese verhält sich umgekehrt wie der erleuchtete Flächeninhalt. Sie wird also in Cc endlich, in MS unendlich klein sein.

Es ist nun die Beleuchtung zu bestimmen, welche entsteht, wenn der Lichtkegel schief gegen das beleuchtete Element steht. Dies findet z. B. statt, wenn die Sonne oder der Vollmond nicht vertical steht.

130. Sei $ABCD$ ein verticaler Kugelkreis, $AEFB$ der Horizont, IM ein kleinerer Kreis der Kugelfläche, welcher den

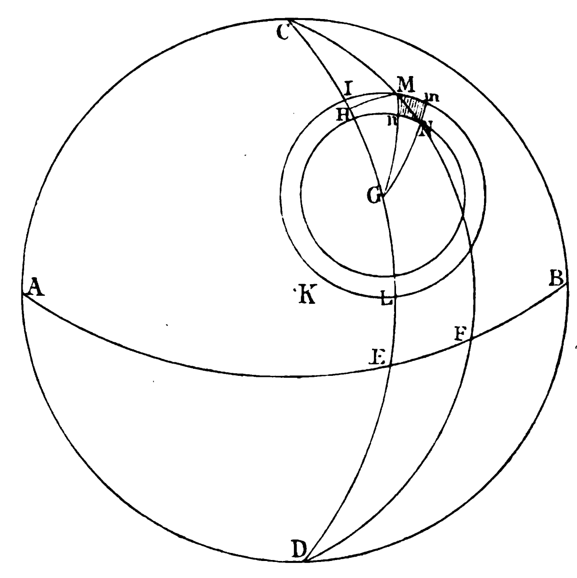


Fig. 14.

Lichtkegel begrenzt, durch den ein in der Ebene des Horizonts und im Centrum K der Kugel befindliches Element beleuchtet wird. Das Centrum oder der Pol des kleinen Kreises sei G, und $CGED$ sei ein Verticalkreis, der durch diesen Pol geht. M sei ein beliebiger Punkt auf diesem kleinen Kreis, und $CMFD$ sei ein Verticalkreis, der durch diesen Punkt geht. Zum Kreis MI denke man sich unendlich nahe benachbart den Kreis Nn gezogen, welcher denselben Pol G hat. Vom Pole G aus ziehe man, einander unendlich nahe, die grössten Kreise oder deren Bögen GM und Gm, und fälle aus M auf CG [63] das sphärische Perpendikel MH. Dann ist die Beleuchtung zu suchen, welche von dem Element $MmNn$ hervorgeht. Zu diesem Zweck setze man

die Distanz GC des Centrums vom Scheitel . $= a$
die Distanz GM des Kreises M vom Pol . . $= x$
die Distanz MC des Punktes M vom Scheitel $= z$
den Winkel CGM . . . . $= y$

dann ist

$$\cos HM = \frac{\cos x}{\cos HG} \qquad \cos z = \cos HC \cdot \cos HM$$

und daher

$$\cos z = \frac{\cos x \cdot \cos HC}{\cos HG} .$$

Es ist aber

$$HC = a - HG \qquad \cos HC = \cos a \cdot \cos HG + \sin a \sin HG$$

und deshalb

$$\cos z = \cos x \cdot (\cos a + \sin a \operatorname{tg} HG) .$$

Es ist aber

$$\operatorname{tg} HG = \operatorname{tg} x \cos y ,$$

daher

$$\cos z = \cos x \cos a + \sin x \sin a \cos y = \sin MF$$

und letzteres ist der Sinus des Einfallswinkels.
Ferner ist das Element

$$Mm\,Nn = dx\,dy \sin x .$$

Also ist die Leuchtkraft dieses Elements, da sie sich verhält wie der Sinus des Incidenzwinkels,

$$d^2\eta = \cos a\,dy \cdot \sin x \cos x\,dx + \sin a \cos y\,dy \cdot \sin^2 x\,dx .$$

Diese Formel erfordert eine zweimalige Integration; bei der ersten ist x und dx constant zu halten, um die Beleuchtung zu finden, welche [**64**] von dem unendlich schmalen Stück MI des sphärischen Ringes herrührt. Daher wird

$$d\eta = y \cos a \sin x \cos x \, dx + \sin a \sin y \sin^2 x \, dx \ .$$

Um nun die Beleuchtung zu finden, welche vom Sector IGM ausgeht, setze man y constant, und dann wird, wenn man die zugehörige Constante zufügt,

$$\eta = \tfrac{1}{2} \cos a \sin^2 x \cdot y + \tfrac{1}{2} \sin a \sin y \cdot (x - \tfrac{1}{2} \sin 2x) \ .$$

Dies ist die Beleuchtung für den Sector IGM. Wir betrachten nun einige specielle Fälle.

131. Befindet sich das Centrum des Kreises im Scheitel, so fallen die Punkte G und C zusammen und es wird $a = \sin a = 0$, $\cos a = 1$, daher ist die Beleuchtung

$$\eta = \tfrac{1}{2} \sin^2 x \cdot y \ .$$

Sie verhält sich also wie das Product aus dem Quadrat des Sinus des scheinbaren Halbmessers und des halben Winkels IGM. Nimmt man daher statt des Sectors den ganzen Kreis, so wird $\frac{1}{2} y = \pi$, also die Beleuchtung $= \sin^2 x$. Dieser einfachere Fall wurde schon früher erledigt (121).

132. Befindet sich das Centrum des Kreises im Horizont, so fallen die Punkte G und E zusammen, und es wird $a = \frac{1}{2}\pi = 90^\circ$, $\cos a = 0$, $\sin a = 1$, daher

$$\eta = \tfrac{1}{2} \sin y \cdot (x - \tfrac{1}{2} \sin 2x) \ .$$

In diesem Fall kann der Winkel y die Grösse eines rechten nicht überschreiten; setzt man also $y = 90^\circ$, so wird $\eta = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{2} \sin 2x)$, und dies ist die Beleuchtung, welche von einem Quadranten dieses Kreises ausgeht, welcher auf der einen oder der anderen Seite des Verticalkreises CE auf dem Horizont steht. Um auch den anderen Quadranten hinzuzufügen, ist dieser Ausdruck zu verdoppeln, es wird also

$$\eta = x - \tfrac{1}{2} \sin 2x \ .$$

[**65**] *In dem Fall also, wo sich das Centrum des Kreises im Horizont befindet, ist die Beleuchtung, welche von dem sichtbaren Halbkreis ausgeht, gleich der Differenz zwischen dem scheinbaren Halbmesser und der Hälfte des Sinus des scheinbaren Durchmessers.*

133. Wenn sich das Centrum G im Scheitel befindet und der Bogen GM in einen Quadranten übergeht, so wird auch der ganze Kreis in eine Halbkugel übergehen, welche auf dem Horizont steht. In diesem Fall findet aber die absolute Beleuchtung statt und es wird $a = \sin a = 0$, $\cos a = 1$, $x = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$, $\sin x = 1$, $\cos x = 0$, $y = 180^\circ = \pi$, $\sin y = 0$, daher ist die Beleuchtung, welche von der halben Hemisphäre kommt,

$$\eta = \tfrac{1}{2}\pi$$

und für den ganzen Kreis ist

$$\eta = \pi \ .$$

Dies ist also die absolute Beleuchtung, auf welche alle anderen zu beziehen sind, wenn eine Vergleichung angestellt wird. Es wurde schon erwähnt, dass dieselbe bei diesen Rechnungen nicht durch die Einheit, sondern durch den Werth π ausgedrückt wird (121, 123).

134 Ist die Höhe des Centrums beliebig, und wird $y = 180^\circ = \pi$, so wird $\sin y = 0$ und daher ist für den Halbkreis auf der einen oder der anderen Seite des Verticalkreises CGE

$$\eta = \tfrac{1}{2}\pi \cos a \sin^2 x$$

und die Beleuchtung, welche einem vollen Kreis entspricht, wird

$$\eta = \pi \cos a \sin^2 x \ .$$

Es ist aber $\cos a$ der Sinus der Höhe des Centrums G, und $\sin^2 x$ ist das Quadrat des Sinus des scheinbaren Halbmessers, endlich ist $\pi \sin^2 x$ der Flächeninhalt der leuchtenden Grundfläche des Kegels oder der *leuchtenden Scheibe*. Dadurch gelangen wir wieder zu dem höchst eleganten

[**66**] 135. **Lehrsatz 9.** *Wenn ein leuchtender kreis- oder kugelförmiger Körper über einer Ebene schwebt, so ist die einem Element dieser Ebene zugewandte Beleuchtung gleich dem Product aus dem Sinus der Höhe des Centrums und dem Inhalt der scheinbaren Kreisscheibe.*

136. Hiermit verwandt ist der folgende

137. **Lehrsatz 10.** *Die absolute Beleuchtung verhält sich zur Beleuchtung durch einen kreis- oder kugelförmigen Körper, der über einer Ebene schwebt, wie die Einheit zum Product aus dem Sinus der Höhe des Centrums und dem Quadrat des Sinus des scheinbaren Halbmessers.*

Denn die absolute Beleuchtung ist $= \pi$ (133); deshalb ist das Verhältniss $= \pi : \pi \cos a \sin^2 x = 1 : \cos a \sin^2 x$ identisch mit dem im Theorem bezeichneten Verhältniss.

138. Hieraus folgt wiederum ohne Weiteres

139. **Lehrsatz 11.** *Wenn derselbe kreis- oder kugelförmige Körper bei derselben Entfernung seines Centrums das eine Mal senkrecht, das andere Mal schief über einer Ebene schwebt, so verhält sich die normale zur schiefwinkeligen Beleuchtung, wie die Einheit zum Sinus der Höhe des Centrums im letzteren Falle.* Denn da die Distanz in beiden Fällen die gleiche ist, so wird auch der scheinbare Halbmesser derselbe sein. Daher hängt die Verschiedenheit der Beleuchtung nur von der Höhe ab. Da aber im ersteren Falle der Sinus der Höhe = 1 ist, so ergibt sich hieraus unser Satz.

140. In diesen Sätzen tritt eine unerwartete Erscheinung auf, infolge deren sie so elegant werden. Man hätte nämlich zweifeln können, ob alle die schiefen Winkel der Strahlen, welche von den verschiedenen Punkten des kreis- [**67**] oder kugelförmigen Körpers ausgehen und auffallen, sich so in eine Summe zusammenziehen und zu einem Mittel vereinigen lassen, dass dieses der *Höhe des Centrums* entspricht. Zwar hat *Halley* bei seiner Untersuchung über die Wärmewirkung der Sonnenstrahlen diese Höhe angenommen, dies jedoch, soviel ich weiss, nur als annähernd richtig bezeichnet. Indessen einen Beweis dafür, dass die mittlere Höhe streng richtig diejenige ist, welche alle anderen Neigungen ersetzt, habe ich nirgends vorgefunden. Wir haben bereits oben (117) einen ähnlichen Zweifel gelöst, der sich auf leuchtende kugelförmige Körper bezog.

141. Mit Hilfe der ermittelten Formeln kann man alle einzelnen Fälle der Beleuchtung durch einen Kegel berechnen. Daher können wir zum zweiten allgemeinen Fall (102) übergehen, nämlich dass der scheinbare Rand des leuchtenden Körpers durch gerade Linien gebildet wird, oder dass der Kugelabschnitt aus einem oder mehreren sphärischen Dreiecken gebildet wird, welche durch grösste Kreise begrenzt werden. Um aber auch hier mit dem einfachsten Fall zu beginnen, wollen wir annehmen, man habe ein einziges und zwar ein rechtwinkeliges Dreieck derart, dass der eine Schenkel und die Hypotenuse im Zenith zusammenstossen. Ferner nehmen wir der grösseren Anschaulichkeit wegen das beleuchtete Element als horizontal an.

142. Sei also $ACBD$ ein Verticalkreis, welcher in A und B den Horizont AEB schneidet, welcher seinerseits in E in die zwei Quadranten AE und EB getheilt ist. Sodann ziehe man einen beliebigen Kreis EMQ und den ihm unendlich benachbarten Emq, ferner den Verticalkreis $CMPD$; dann handelt es sich um die Beleuchtung eines im Centrum der Kugel befindlichen Elementes durch das rechtwinkelige Dreieck MCQ.

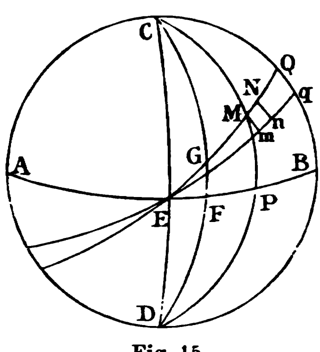


Fig. 15.

[68] 143. Zum Punkt E als Pol ziehe man die parallelen und unendlich benachbarten Bogenelemente Mm und Nn, und es sei die vom Element $MmnN$ ausgehende Beleuchtung $= d^2\eta$. Ferner sei

$$CQ = y \qquad PB = \omega \qquad MQ = x \,,$$

dann ist

der Flächeninhalt $MmnN \quad = dy\,dx \cos x$
der Sinus der Höhe $PM \quad = \cos x \cos y$

und da die Beleuchtung sich verhält wie das Product aus beiden Grössen, so wird

$$d^2\eta = \cos y\, dy \cdot \cos^2 x\, dx \;.$$

Um diesen Ausdruck zu integriren, muss man zuerst y und dy constant halten, woraus

$$d\eta = \tfrac{1}{2} \cos y\, dy \cdot (x + \sin x \cos x) \;.$$

Dies ist also die Beleuchtung, welche dem Theil $MQqm$ entspricht.

144. Nimmt man jetzt y oder CQ als veränderlich an, so variirt auch x oder MQ, und zwar in der Weise, dass

$$\sin y = \operatorname{cotg} \omega \cdot \operatorname{tg} x \;.$$

Da aber ω constant ist, so wird

$$d \sin y = \cos y\, dy = \operatorname{cotg} \omega \cdot d \operatorname{tg} x \;.$$

Setzt man dies ein, so folgt

$$d\eta = \tfrac{1}{2} \operatorname{cotg} \omega \cdot (x\, d \operatorname{tg} x + \sin x \cos x\, d \operatorname{tg} x) \;.$$

Es ist aber

$$d \operatorname{tg} x = \frac{dx}{\cos^2 x} \ ,$$

also durch Substitution dieses Werthes in das zweite Glied

$$d\eta = \tfrac{1}{2} \operatorname{cotg} \omega \cdot (x \, d \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x \, dx) \ ,$$

mithin durch Integration:

$$\eta = \tfrac{1}{2} \operatorname{cotg} \omega \, x \operatorname{tg} x \ .$$

[**69**] Da aber

$$\operatorname{cotg} \omega \operatorname{tg} x = \sin y$$

so wird

$$\eta = \tfrac{1}{2} x \sin y \ .$$

So sind wir schliesslich zu einer sehr eleganten Formel gelangt, welche man aussprechen kann durch den folgenden

145. **Lehrsatz 12.** *Die Beleuchtung, welche von dem verticalen Dreieck CMQ ausgeht, ist die Hälfte des Products aus dem Sinus des verticalen Schenkels CQ und der Bogenlänge des anderen Schenkels QM.*

146. Man kann den Schenkel CQ festhalten und den anderen Schenkel QM variiren. *In diesem Fall ist in der Formel y constant und x veränderlich, mithin wächst die Beleuchtung im einfachen directen Verhältniss des Bogens $QM = x$.*

147. Ist also $GM = MQ$, sind die Beleuchtungen, welche von den Dreiecken QCM und MCG ausgehen, einander gleich.

148. Der gegenwärtige Fall kommt bei Weitem am häufigsten vor; denn als ein Kreis EQ stellt sich der scheinbare obere Rand von Hausdächern und von Mauern dar, welche zur Umfriedung von Gärten dienen und deren oberer Rand horizontal ist.

149. Aus diesen Sätzen folgt ferner, dass die Beleuchtung, welche

vom Dreieck	MCQ	ausgeht,	$= \frac{1}{2} MQ \cos MEP$	ist
» »	GCM	»	$= \frac{1}{2} GM \cos MEP$	»
» »	PCB	»	$= \frac{1}{2} PB$	»
» »	FCP	»	$= \frac{1}{2} FP$	»

mithin auch

vom Dreieck	EGF	$= \frac{1}{2} EF - \frac{1}{2} EG \cos GEF$
» »	EQB	$= \frac{1}{4} \pi (1 - \cos GEF)$
vom Viereck	$FGMP$	$= \frac{1}{2} FP - \frac{1}{2} GM \cos GEF.$

[70] 150. Hieraus lässt sich ferner leicht die Beleuchtung ermitteln, welche von einem beliebigen Dreieck ausgeht. Eine allgemeine Methode ist die folgende: Sei $ACBD$ ein Verticalkreis, AEB der Horizont, und sei die Beleuchtung gesucht, welche von dem Dreieck QNF hervorgebracht wird, wenn das beleuchtete Element horizontal liegt und sich im Centrum der Kugel befindet. Vom Scheitel C ziehe man durch die Spitzen N, Q, F der Winkel die Verticalkreise CND, CQD, CFD. Dann hat man drei verticale Dreiecke NCQ, QCF, FCN. Sucht man also mit Hilfe der vorigen Formel die Beleuchtung, welche von jedem dieser 3 Dreiecke herrührt, so bleibt dann nichts weiter zu thun, als die Beleuchtung durch das Dreieck FCN von der Summe der Beleuchtungen durch die Dreiecke NCQ und QCF zu subtrahiren. Die Differenz ist dann die gesuchte Beleuchtung.

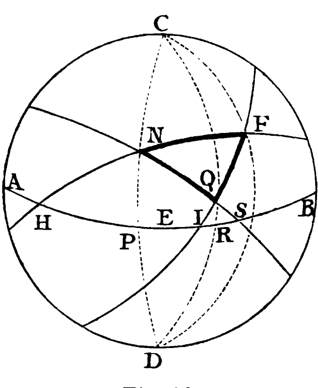


Fig. 16.

151. Nun ist die Beleuchtung, welche

vom Dreieck	NCQ	herrührt,	$= \frac{1}{2} NQ \cos NSE$
» »	QCF	»	$= \frac{1}{2} QF \cos FIB$
» »	FCN	»	$= \frac{1}{2} FN \cos FHE$,

also ist die gesuchte Beleuchtung

$$\eta = \tfrac{1}{2} NQ \cos NSE + \tfrac{1}{2} QF \cos FIB - \tfrac{1}{2} FN \cos FHE .$$

152. Nachdem jetzt die Beleuchtung für ein beliebiges Dreieck gefunden ist, ergibt sich sogleich diejenige für ein Vieleck, dessen Seiten ebenfalls grösste Kreise oder deren Bögen sind. Denn da man ein solches in Dreiecke auflösen kann, so wird man für jedes einzelne Dreieck die Beleuchtung bestimmen und die Summe aller einzelnen Beleuchtungen wird die gesuchte sein. Offenbar kann man aber auch folgendes kürzere Verfahren einschlagen: Sei $ACBD$ ein Verticalkreis, AB der Horizont und $EFGHI$ ein Fünfeck. Vom Zenith C aus ziehe man die Verticalkreise [71] CE, CF, CG, CH, CI und suche mit Hilfe der Formel § 144 die Beleuchtung, welche von den Dreiecken ECF, FCG, GCH, HCI, ICE ausgeht; dann

zeigt ein Blick auf die Figur, dass man von der Summe der drei ersten die Summe der zwei letzten abziehen muss, um die Beleuchtung zu finden, welche von diesem Fünfeck ausgeht.

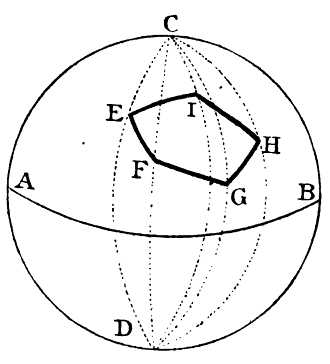


Fig. 17.

153. Da man also die Beleuchtung, welche einem beliebigen, durch grösste Kreise begrenzten, sphärischen Segment entspricht, auf die Beleuchtung durch solche Dreiecke zurückführen kann, deren eine Ecke in das Zenith fällt, so wollen wir zu den letzteren zurückkehren, um ihre Eigenschaften etwas genauer zu untersuchen. Behält man also alle Bezeichnungen von § 142 bei, so hat man gesehen, dass $\eta = \frac{1}{2}x \sin y = \frac{1}{2} MQ \sin CQ$ diejenige Beleuchtung ist, welche dem Dreieck CQM entspricht, dessen Schenkel CQ und MQ in Q einen rechten Winkel bilden. Hält man ferner den Schenkel CQ fest, so hat man gesehen, dass die Beleuchtung proportional ist zur Bogenlänge des Schenkels QM; wählt man also auf dem Kreis EQ irgend einen Abschnitt GM und zieht man die Verticalkreise CM und CG, so entspricht dem Dreieck GCM die Beleuchtung $\frac{1}{2} GM \sin CQ$.

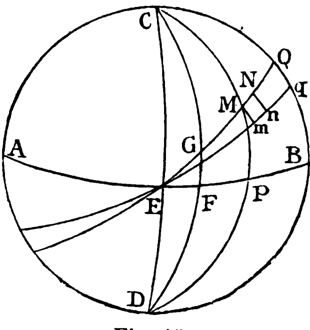


Fig. 15.

154. Die Beleuchtung durch ein beliebiges verticales Dreieck GCM hängt hiernach offenbar nur von 2 Stücken desselben ab, nämlich einerseits vom Schenkel GM, welcher dem Scheitel C gegenüber liegt, andererseits vom Bogen CQ, oder, was dasselbe ist, vom Complement des Winkels QEB; den letzteren kann man mit einem aus der Astronomie entlehnten Ausdruck als den *Elevationswinkel* des Kreises EQ über den Horizont EB bezeichnen. Wenn man sich diesen Kreis EQ als den Aequator vorstellt, so kann man sich nicht unpassend so ausdrücken: *Die einem beliebigen Dreieck GCM*

entsprechende Beleuchtung ist gleich dem halben [**72**] *Product aus dem Cosinus des Elevationswinkels des Aequators und dem auf diesem abgeschnittenen Stück oder dem Bogen* GM.

155. Die Beleuchtung ist also in diesem Falle von der Grösse oder dem Flächeninhalt des Dreiecks unabhängig, denn dieser ist gleich der Differenz zwischen der Summe der 3 Winkel des sphärischen und eines ebenen Dreiecks, und daher kann die Beleuchtung, welche einem Dreieck entspricht, dem Flächeninhalt desselben nicht proportional sein. Hält man den Abschnitt GM fest, so wird der Flächeninhalt $\triangle GCM$ um so kleiner sein, je näher jener Abschnitt dem Culminationspunkt Q oder je kleiner der Bogen MQ ist.

156. Nimmt man statt GM den Quadranten $EQ = \frac{1}{2}\pi$, so wird die vom Dreieck ECQ abhängige Beleuchtung $= \frac{1}{4}\pi \cos QEB = \frac{1}{4}\pi \sin CQ$; in diesem Falle wird also bei wachsender Zenithdistanz des Culminationspunktes Q die Beleuchtung zunehmen wie der Sinus des Bogens CQ. Wenn dieser Zuwachs unendlich klein ist $= Qq = dy$, so wird $d\eta = \frac{1}{4}\pi \cos y\, dy = \frac{1}{4}\pi \cdot Qq \cdot \sin BQ$. Obgleich also die Zunahme der Helligkeit, welche einem Element $MmnN$ eines beliebigen unendlich kleinen Sectors QEq entspricht, wächst wie der Sinus der Höhe MP, da dieser dem Sinus des Incidenzwinkels gleich ist, so wird dennoch die dem ganzen Sector entsprechende Zunahme wachsen wie der Sinus der Höhe des Culminationspunktes. Dies ist jedenfalls merkwürdig; denn beim ersten Anblick hätte man vermuthen können, dass dieser Zuwachs in demselben Verhältniss stehe, wie der Sinus irgend eines dazwischenliegenden Winkels, z. B. des Bogens PM. Es wird also nicht ohne Nutzen sein, die Ursache dieses Paradoxons aufzusuchen.

157. Sei wie oben (143) der Flächeninhalt $MmnN = dy\, dx \cos x$, ferner setze man die Höhe $PM = z$, so wird die Beleuchtung

$$d^2\eta = dy\, dx \cos x \sin z \;.$$

[**73**] In diesem Ausdrucke ist dy constant, also wird

$$d\eta = dy \int dx \cos x \sin z$$

oder

$$d\eta = dy \int \sin z\, d \sin x \;.$$

Da aber

$$\frac{1}{\sin EM} = \frac{\sin MEP}{\sin MP} \ ,$$

so wird

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{\cos y}{\sin z} \ ,$$

woraus

$$\sin z = \cos y \cos x \ .$$

Der Bogen y ist aber hier constant, daher hat man durch Substitution

$$d\eta = \cos y \, dy \int \cos x \, d \sin x \ .$$

Wie also auch das Integral wird, jedenfalls hängt es nicht vom Bogen y ab, sodass die einem beliebigen Theil MEm entsprechende Beleuchtung sich verhält, wie der Sinus der Höhe des Culminationspunktes. Der Grund für die unerwartete Erscheinung liegt also darin, dass $\sin z$ einfach im Verhältniss wie $\cos x$ steht, so lange der Bogen y constant bleibt. Daher kommen dy und $\cos y$ im Integral nicht vor.

158. Wenn man dennoch einen solchen zwischenliegenden Sinus aufzusuchen wünscht, so kann man die Sache so anfassen. Zuerst ist die Integration zu erledigen und es wird wie oben:

$$d\eta = \tfrac{1}{2} \cos y \, dy (x + \sin x \cos x) \ .$$

Andrerseits ist der Inhalt des Stückes $MQqm$ zu suchen, welcher gleich

$$dy \int \cos x \, dx = dy \sin x$$

ist. Derselbe ist mit dem Sinus des zwischenliegenden Winkels $= \sin \zeta$ zu multipliciren, und das Product muss $= d\eta$ sein. Es wird also

$$d\eta = dy \sin x \sin \zeta = \tfrac{1}{2} \cos y \, dy \, (x + \sin x \cos x)$$

[74] und daher

$$\sin \zeta = \frac{\cos y (x + \sin x \cos x)}{2 \sin x} \ .$$

Hieraus folgt: 1) $\sin \zeta$ hängt vom Bogen QM und vom Sinus und Cosinus desselben ab, 2) bei gleichbleibendem Bogen $QM = x$ ist der Sinus des gesuchten Bogens ζ proportional dem Sinus der Höhe des Culminationspunktes Q, 3) er verhält sich zu diesem wie $x + \sin x \cos x$ zu $2 \sin x$.

159. Es ist also

$$\sin\zeta = \frac{x\cos y}{2\sin x} + \tfrac{1}{2}\cos y\cos x\,.$$

Nun ist aber

$$\cos y\cos x = \sin MP = \sin z\,,$$

mithin ist

$$\sin\zeta = \frac{x\cos y}{2\sin x} + \tfrac{1}{2}\sin z\,.$$

Daher ist $\sin\zeta$ nicht weit von dem Mittel zwischen $\sin MP$ und $\sin QB$ entfernt. Denn für kleinere Bögen MQ wird sehr nahe $x = \sin x$, also auch sehr nahe

$$\sin\zeta = \frac{\cos y + \sin z}{2}\,.$$

160. Der gefundene Ausdruck für $\sin\zeta$ ist zwar ziemlich einfach, wenn man den Sector QEq unendlich schmal annimmt; er wird aber durch die zweite Integration viel verwickelter. So wird für das Dreieck GCM

$$\sin\zeta = \frac{\tfrac{1}{2}x\sin y}{CGM + CMG + MCG - \pi}\,,$$

wobei diese Winkel in Einheiten des Radius gemessen sind. Es ist nämlich der Nenner dieses Bruches gleich dem Flächeninhalt des Dreiecks GCM.

[**75**] 161. Bei der Besprechung des dritten allgemeinen Falles (102) können wir uns kürzer fassen, da die unzähligen sehr verschiedenen Fälle, welche er in sich schliesst, seltener vorkommen und sich schwieriger berechnen lassen. Jedoch werden unten specielle Fälle vorkommen, wenn von der Beleuchtung des Planetensystems die Rede ist. Es wird daher genügen, die Methode anzugeben, deren wir uns in solchen Fällen bedienen werden. Wir fassen dabei wieder sphärische Segmente ins Auge.

162. Welches also auch die Figur des Randes des leuchtenden Körpers sei, so kann man doch immer einen Punkt als Centrum annehmen, auf welches man die übrigen Stücke der scheinbaren Fläche bezieht oder bequem beziehen kann. Man nehme die Elevation dieses Centrums über das beleuchtete Element, sie sei EG, ferner bezeichne $ACBD$ einen Verticalkreis, und AEB sei der Horizont des beleuchteten Elements, welches

sich im Centrum der Kugel befindet. Vom Centrum G aus ziehe man die einander unendlich benachbarten Bögen GM, Gm, und suche dann aus den Bedingungen der Beleuchtung und der Lage des leuchtenden Gegenstandes die Beziehung zwischen dem Winkel IGM und dem Bogen GM, welche sich durch eine Gleichung aussprechen wird. Denn setze man wie oben (130)

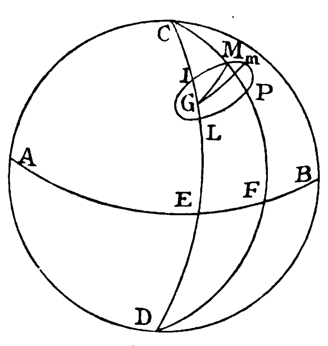


Fig. 18.

$$CG = a \qquad CM = z$$
$$GM = x \qquad CGM = y$$

so ergibt sich mit Hilfe jener Gleichung x aus y und umgekehrt. Für das Element Mm wird aber der Sinus des Einfallswinkels

$$\sin MF = \cos z = \cos x \cos a + \sin x \sin a \cos y \ ,$$

und der Inhalt des Elementes Mm

$$= dy\, dx \sin x,$$

also ist die entsprechende Beleuchtung

$$d^2\eta = \cos a\, dy \cdot \sin x \cos x\, dx + \sin a \cos y\, dy \cdot \sin^2 x\, dx \ .$$

[76] Hält man nun y und dy constant, um die Beleuchtung zu finden, welche dem Flächenstück MGm entspricht, so wird durch Integration:

$$d\eta = \tfrac{1}{2} \cos a \sin^2 x\, dy + \tfrac{1}{2} \sin a \cos y\, (x - \sin x \cos x)\, dy \ .$$

Um auch die zweite Integration zu erledigen, drücke man in diesem Ausdruck x durch y, oder y durch x aus, was mit Hilfe der gefundenen Gleichung zwischen dem Bogen GM und dem Winkel IGM geschieht; dann ergibt sich durch Integration η als Function von y oder x, und dies ist die Beleuchtung durch das Flächenstück IGM.

163. Sieht man beispielsweise den Abschnitt IML als kreisförmig an, so wird G zum Mittelpunkt und x ist constant. Daher findet man durch Integration wieder die Formel des § 130:

$$\eta = \tfrac{1}{2} \cos a \sin^2 x \cdot y + \tfrac{1}{2} \sin a \sin y\, (x - \tfrac{1}{2} \sin 2x) \ .$$

164. Ist $y = x$, so hat man

$$d\eta = \tfrac{1}{2}\, dx \cos a \sin^2 x + \tfrac{1}{2} \sin a \cos x\,(x - \sin x \cos x)\, dx$$

und das Integral hiervon ist nach Zufügung der erforderlichen Constanten:

$$\eta = \tfrac{1}{4} x \cos a - \tfrac{1}{4} \cos a \sin x \cos x$$
$$+ \tfrac{1}{2} \sin a\,(x \sin x + \cos x + \tfrac{1}{3} \cos^3 x - \tfrac{4}{3}) \,.$$

165. Statt der Gleichung zwischen IGM und GM kann man auch eine andere nehmen, nämlich diejenige, welche zwischen EF und den Höhen FP und FM besteht. Da aber diese Fälle eine umständliche Rechnung veranlassen und sonst nichts elegantes bieten, so ist es nicht der Mühe werth, dieselben hier weitläufiger durchzugehen, zumal da unten andere hierhergehörige Beispiele vorkommen, welche angenehmer sind als diese abstracten Fälle.

166. Alle bisherigen Auseinandersetzungen über das directe Licht stützen sich auf die Voraussetzung: *dass die Oberfläche des leuchtenden Körpers überall mit der gleichen Intensität leuchte*, und auf Grund derselben haben wir alle Fälle, die es geben kann, aufgezählt und diejenigen, [77] welche häufiger vorkommen, einer ausführlicheren Rechnung unterworfen. Wenn man aber annimmt, die leuchtende Fläche besitze an verschiedenen Stellen eine verschiedene Helligkeit, so ist zuerst das Gesetz zu bestimmen, nach welchem diese Helligkeit in Länge und Breite abnimmt. Ist dieses gegeben, so muss dann die oben gefundene Beleuchtung, welche einem beliebigen Element, z. B. $MmnN$ (Fig. 15), entspricht, mit der Helligkeit multiplicirt werden, welche demselben eigenthümlich ist. Dann findet man durch Integration die Beleuchtung, welche der ganzen Oberfläche oder einem Theil derselben entspricht. Da es aber hier unendlich viele verschiedene Fälle gibt, so würde es überflüssig sein, die Sache durch Beispiele zu illustriren, wozu sich im Folgenden ein mehr geeigneter Platz finden wird. Wir verweisen also den Leser auf diejenigen Capitel, in welchen von der Beleuchtung des Planetensystems und vom Schatten die Rede ist.

167. Bevor wir jedoch nach Erledigung dieser Gegenstände die Behandlung der directen Beleuchtung beschliessen, bleibt noch manches übrig, wobei noch etwas zu verweilen zweckmässig ist; den Theil der beleuchteten Fläche haben wir als unendlich klein angenommen und als Einheit angesehen (122), sodass

wir also diejenige Beleuchtung fanden, welche diesem Element oder Punkt eigen ist und welche daher für verschiedene Punkte verschieden ist. Es kommt aber oft vor, dass man auf alle Strahlen, welche auf die ganze Fläche auffallen, Rücksicht nehmen muss, unabhängig von der Helligkeit, welche dieselben in den einzelnen Punkten der beleuchteten Fläche hervorbringen. Diese Menge nämlich, dividirt durch die scheinbare Grösse der Fläche, bestimmt deren *mittlere Helligkeit.* In diesem Falle ist die Rechnung aber viel verwickelter, weil für [78] jeden Punkt der beleuchteten Fläche der Incidenz- und Emanationswinkel, die Entfernung der Lichtquelle, ihre scheinbare Grösse und in einigen Fällen auch die scheinbare Gestalt des Randes sich ändern. Wenn wir dies also an dem einen oder anderen Beispiel erläutern, so unternehmen wir damit durchaus nicht etwas unnützliches oder schon dagewesenes.

168. Sei, um mit dem einfachsten zu beginnen, *ABMD* ein Kreis; senkrecht über seinem Centrum befinde sich die Kugel *G*, deren ganze Oberfläche gleichmässig leuchtet. Man suche dann die Menge der auf den Kreis auffallenden Lichtstrahlen und die mittlere Helligkeit dieses Kreises. Hierzu kann man sich mehrerer Vereinfachungen bedienen, welche die Rechnung in beachtenswerther Weise elegant machen.

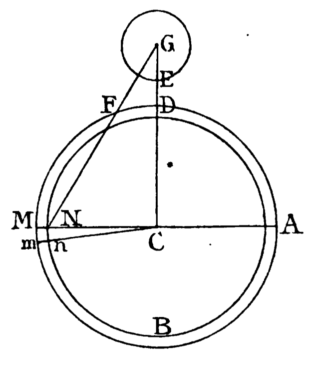


Fig. 19.

1) Die absolute Beleuchtung werden wir mit π bezeichnen (133), d. h. diejenige Beleuchtung, welche im Punkte *C* stattfinden würde, wenn ihm die Oberfläche der Kugel unendlich nahe wäre (100).

2) Den Halbmesser der Kugel darf man $= 1$ setzen, denn wenn dies die gegenseitige Entfernung der Mittelpunkte *G* und *C* ist, so entsteht die absolute Beleuchtung.

3) Von der scheinbaren Grösse der Kugel darf man absehen, da wir bewiesen haben, dass die Beleuchtung sich umgekehrt verhält wie das Quadrat der Entfernung des Centrums (115).

4) Da diese Entfernung für jedes Element *MmnN* des Ringes *ABMD* dieselbe ist, so findet man auf einen Schlag die Menge der auf den ganzen Ring auffallenden Strahlen.

[79] 169. Sei also

die Entfernung der Centra $CG = a$
der Halbmesser des Ringes $CN = x$
die Breite des Ringes $NM = dx$,

dann wird

die Distanz $GN = \sqrt{a^2 + x^2}$

der Sinus des Incidenzwinkels $GMC = \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}}$.

Bezeichnet man daher die Dichtigkeit der auf den Ring $ABMD$ auffallenden Strahlen mit η, ihre Menge mit dq, so wird:

$$\eta = \pi \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}} \cdot \frac{1}{a^2 + x^2}.$$

Denn die Beleuchtung steht im zusammengesetzten Verhältniss der absoluten Beleuchtung, des Sinus des Incidenzwinkels und des reciproken Quadrats der Entfernung des Centrums G. Durch Zusammenziehung des vorigen Ausdrucks hat man also:

$$\eta = \frac{a\pi}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

In diesem Fall verhält sich also die Beleuchtung eines Elements $MmnN$ umgekehrt wie der Cubus der Entfernung. Um jetzt die Menge dq zu bestimmen, ist die Beleuchtung η mit dem Flächeninhalt des Ringes zu multipliciren, es ist also

$$dq = \eta \cdot 2\pi x\, dx,$$

oder, wenn man die Substitution ausführt:

$$dq = \frac{2a\pi^2 x\, dx}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Das Integral hiervon ist nach Hinzufügung der erforderlichen Constanten:

$$q = 2\pi^2\left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}}\right).$$

Es ist aber

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{GC}{GN} = \text{Sinus des Incidenzwinkels},$$

daher ist $1 - a : \sqrt{a^2 + x^2}$ der Sinus versus des Winkels NGC,

der das Complement vom vorigen ist. *Daher steht die Menge der Strahlen, welche auf den* [**80**] *Kreis ABMD auffallen, in demselben Verhältniss wie der Sinus versus des Winkels NGC, welcher gleich dem scheinbaren Halbmesser des beleuchteten Kreises ist, vom Centrum der leuchtenden Kugel aus gesehen.*

170. Lässt man das Dreieck NGC um die Axe GC rotiren, so schneidet die Gerade NFG aus der Oberfläche der Kugel G ein Segment aus, dessen Flächeninhalt ist

$$2\pi\left(1-\frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}\right).$$

Daher drückt dieser Flächeninhalt die Menge der auf den Kreis AM auffallenden Strahlen aus, da er dieser Grösse proportional ist.

171. Wenn man endlich diesen Flächeninhalt mit der absoluten Beleuchtung π multiplicirt, so folgt

$$2\pi^2\left(1-\frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)=q\,,$$

dies ist also die wahre Menge der Strahlen.

172. Setzt man den Radius des Kreises CM unendlich, so geht die Formel in die folgende über

$$q=2\pi^2\,.$$

Dies ist das Product aus der absoluten Beleuchtung oder der Helligkeit der leuchtenden Kugel und dem doppelten Flächeninhalt eines grössten Kreises der Kugel. Hieraus folgt von selbst der

173. **Lehrsatz 13.** *Die Menge der Strahlen, welche eine leuchtende Kugel nach einer unendlich ausgedehnten Ebene hinsendet, ist dieselbe wie die, welche sie im Falle der absoluten Beleuchtung auf eine Kreisfläche werfen würde, welche der halben Oberfläche der Kugel gleich ist.*

Beweis: Die absolute Beleuchtung ist $=\pi$ (133, 168); und dies ist die Menge der Strahlen, welche auf ein Flächenstück $=1$ auffallen. Wenn man also annimmt, dass ein Kreis, welcher der halben Oberfläche der Kugel gleich ist, einer absoluten Beleuchtung ausgesetzt sei, so wird jetzt die Menge [**81**] der Strahlen $=2\pi^2$ sein, da dieselbe im Verhältniss der Flächenräume, also wie $1:2\pi$, vergrössert wird. Dies ist aber dieselbe

Strahlenmenge wie diejenige, welche auf eine unendlich ausgedehnte Kreisebene auffällt. Hieraus ergibt sich die Behauptung.

174. Um jedoch diesen Satz richtig zu verstehen, muss man bemerken, dass eine solche Beleuchtung, wenigstens wenn man sie sich durch eine leuchtende Kugel hervorgebracht denkt, nur fingirt ist. Denn da die Kugel nur das Centrum des Kreises berührt, so findet zwar in diesem Centrum absolute Beleuchtung statt, nicht aber in irgend einem anderen Punkte, und daher wird die Menge der Strahlen jedenfalls kleiner sein. Um dies genauer einzusehen, setze man $x = 1$, $a = 1$; dann hat man $q = 2\pi^2(1 - \sqrt{\tfrac{1}{2}})$, während man erwarten könnte, dass $q = 2\pi^2$. Ebenso ist die mittlere Helligkeit weit kleiner als die absolute. Dividirt man nämlich die Grösse $2\pi^2(1 - \sqrt{\tfrac{1}{2}})$ durch die Fläche 2π des Kreises, so wird diese mittlere Helligkeit $= \pi(1 - \sqrt{\tfrac{1}{2}})$, und dies ist noch nicht der dritte Theil der absoluten. Indessen kann man eine solche Beleuchtung nicht als schlechthin fingirt betrachten, da sie thatsächlich stattfindet, wenn man diesen Kreis mit der Concavseite einer Halbkugel bedeckt, welche mit derselben Intensität leuchtet, wie die Kugeloberfläche. Es ist nicht einmal nöthig, dass man ihn mit einer Halbkugel bedeckt, da man letztere durch jede beliebige andere Fläche ersetzen kann (90 fgde.). In diesem Sinne muss man also die absolute Beleuchtung des ganzen Kreises auffassen. Man kann übrigens, wenn man für diese oder andere Zwecke leuchtende Flächen herstellen will, Phosphor anwenden oder auch die Pyrotechnik zu Rathe ziehen, wo die Zubereitung solcher Mittel gezeigt wird. An diese Vorbemerkungen schliessen wir den folgenden

[**82**] 175. **Lehrsatz 14.** *Die Menge der Strahlen, welche sich von der ganzen Oberfläche einer Kugel nach allen Richtungen hin ausbreiten, ist eben so gross wie diejenige, welche im Fall der absoluten Beleuchtung auf eine ebene Kreisfläche auffällt, welche der leuchtenden Kugeloberfläche inhaltsgleich ist.*

Beweis. Nimmt man den Halbmesser der Kugel $= 1$, so ist die Menge der Strahlen, welche auf eine unendlich ausgedehnte Ebene fallen, $= 2\pi^2$. Wenn man nun annimmt, dass sich die Kugel zwischen 2 solchen Ebenen befinde, welche einander parallel sind, so folgt, dass alle Strahlen, die aus der Oberfläche der Kugel austreten, auf die eine oder die andere von beiden Ebenen auffallen müssen; ihre Menge muss also das Doppelte von derjenigen sein, welche auf nur eine Ebene auffällt,

also gleich $4\pi^2$. Es ist aber 4π die Oberfläche einer Kugel, und wenn man diese mit der absoluten Beleuchtung π multiplicirt, so ergibt sich $4\pi^2$ als die Menge der Strahlen, welche im Fall der absoluten Beleuchtung auf eine Kreisfläche derselben Grösse auffallen. Da beide Ausdrücke gleich sind, so folgt der Satz.

Zweiter Beweis. Wir fügen diesen zweiten Beweis deshalb bei, weil er directer ist und weil er gewissermaassen durch ein Beispiel zeigt, dass die Grundlagen des ersteren richtig sind. Man denke sich die leuchtende Kugel umgeben von einer concentrischen Kugel, deren Radius $= x$ sei; dann werden offenbar die einzelnen Theile dieser Kugelfläche von der leuchtenden Kugel gleichmässig beleuchtet, und die Beleuchtung an irgend einer Stelle ist $= \pi : x^2$. Daher ist die Menge der Strahlen, welche sich über die ganze Kugelfläche ausbreiten, [**83**] $= \frac{\pi}{x^2} \cdot 4\pi x^2$, da die Beleuchtung $\pi : x^2$ mit dem Flächeninhalt zu multipliciren ist. Es ist aber $\frac{\pi}{x^2} \cdot 4\pi x^2 = 4\pi^2$, also gleich der fraglichen Menge der Strahlen, welche im Falle der absoluten Beleuchtung auf ein Ebenenstück auffallen, welches der Oberfläche der Kugel inhaltsgleich ist.

176. Wir haben dieses leichtere Beispiel für die Berechnung einer Strahlenmenge (167) um so lieber benutzt, da bei seiner Entwickelung mehrere Hauptsätze der Photometrie und mehrere Kunstgriffe zur Verwendung kamen. Für diesen Zweck sei auch noch das folgende Beispiel angeführt.

177. Auf der Horizontalebene $ABCD$ stehe eine Verticalebene $AFED$, welche leuchtend sei. Man suche die Menge der Strahlen, welche auf das horizontale Ebenenstück auffällt. Obwohl diese Aufgabe sehr einfach scheint, so ist ihre Lösung doch weit verwickelter als man glauben sollte. Denn es wäre zwar sehr leicht, den Differentialausdruck, welcher von der vierten Ordnung ist, aufzustellen, der dann viermal integrirt

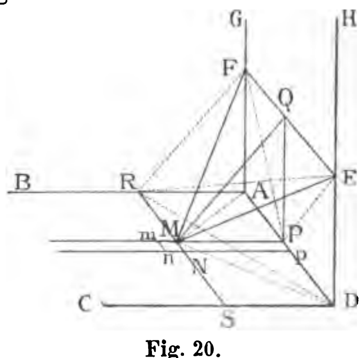


Fig. 20.

werden müsste; aber die höchst mühsame Rechnung würde auch den geduldigsten mit Widerwillen erfüllen und abschrecken. Die einzige Vereinfachung, welche ich habe erreichen können, besteht darin, dass ich mit Hilfe der oben aufgestellten Sätze den Ausdruck auf ein Differential zweiter Ordnung reduciren und auf diese Weise die Rechnung ausführen konnte.

178. Mit Hilfe dieser Sätze erhielt ich sofort die Menge der Strahlen, welche von der ganzen Ebene $AFED$ auf das Element $MmnN$ auffallen, [**84**] während man sonst eine zweifache Integration hätte ausführen müssen, die jedoch oben (142 fgde.) allgemein erledigt worden ist. Aber auch dies durfte man nicht direct ausführen, wenn man die Sache mit möglichst wenig Arbeit erledigen wollte. Ich habe daher die Aufgabe in folgender Weise angefasst.

179. Man ziehe die Verlängerungen FG, EH und denke sich die Ebene AH unendlich hoch und in ihren einzelnen Theilen gleich stark leuchtend; dann kann man dieselbe durch ein solches sphärisches Segment ersetzen (91 fgde.), wie es z. B. in Figur 15 durch FCP oder PCB dargestellt wird, wobei ein beliebiges Element, dessen Beleuchtung gesucht ist, sich im Centrum der Kugelfläche befindet. In ähnlicher Weise kann man das Rechteck $AFED$ durch ein sphärisches Segment ersetzen, welches durch die Seiten der Pyramide $MAFED$ ausgeschnitten wird. Dann werden den geraden Linien AG, PQ, DH verticale Kreise entsprechen, während AD den Horizont, und FE den Aequator darstellen. Wenn nun MP und PQ auf AD senkrecht stehen, so wird Q der Culminationspunkt des Aequators sein und QMP ist seine Elevation über den Horizont. Endlich werden FMQ, QME die Bögen sein, welche auf dem Aequator abgeschnitten werden. Diese Bezeichnungsweise ist der grösseren Durchsichtigkeit wegen gewählt worden (154).

180. Unendlich benachbart zu PM, und parallel zu dieser Geraden sei pN gezogen. Senkrecht dazu gehe durch den Punkt M die Gerade RMS; endlich ziehe man MA, MD, MF, ME, PF, PE, RD. Ferner setze man

$$AF = a \qquad AP = x \qquad FMQ = v$$
$$AD = b \qquad PM = y \qquad FPQ = \omega\ .$$

Die Beleuchtung in M, welche von dem oberen Ebenenstück $GFEH$ ausgeht, sei η, und die Menge der Strahlen, welche auf das Element $MmnN$ auffällt, sei d^2Q; dann ist (154, 179)

$$\eta = \tfrac{1}{2} FME \cdot \cos QMP\ ,$$

[85] und dieser Ausdruck zerlegt sich in die zwei folgenden

$$\eta = \tfrac{1}{2} FMQ \cdot \cos QMP + \tfrac{1}{2} QME \cdot \cos QMP ,$$

wo das erste Glied die von der linken Seite, das zweite die von der rechten Seite auf ein Element $= 1$ auffallende Strahlenmenge darstellt. Hieraus folgt

$$d^2Q = \eta\, dy\, dx = (\tfrac{1}{2} FMQ \cdot \cos QMP + \tfrac{1}{2} QME \cdot \cos QMP)\, dy\, dx .$$

181. Da beide Glieder dieses Differentialausdruckes in gleicher Weise zu behandeln sind, so werden wir nur die Behandlung des einen durchführen. Sei also die ihm entsprechende Strahlenmenge $= d^2q$, so wird

$$d^2 q = \tfrac{1}{2} FMQ \cos QMP \cdot dy\, dx ,$$

oder durch Einsetzung der Werthe:

$$2 \frac{d^2q}{dx} = v \frac{y\, dy}{\sqrt{y^2 + a^2}} .$$

Es ist aber

$$\operatorname{tg} v = \frac{x}{\sqrt{y^2 + a^2}} .$$

Wenn man daher zuerst die Strahlenmenge sucht, welche auf das Rechteck $PMNp$ auffällt, so ist x constant und

$$y\, dy = x^2 \operatorname{cotg} v\, d \operatorname{cotg} v = x \sqrt{y^2 + a^2}\, d \operatorname{cotg} v .$$

Substituirt man diesen Werth, so wird

$$\frac{2 d^2q}{x\, dx} = v\, d \operatorname{cotg} v$$

und hieraus folgt durch Integration:

$$\frac{2\, dq}{x\, dx} = v \operatorname{cotg} v - \log \sin v + \text{Const.}$$

182. Wenn y verschwindet, so fallen keine Strahlen mehr auf, und daher wird dann $dq = 0$. Bei $y = 0$ [86] wird aber $v = \omega$, da die Dreiecke FMQ und FPQ zusammenfallen; mithin wird

$$\text{Const} = - \omega \operatorname{cotg} \omega + \log \sin \omega ;$$

setzt man also diese Grösse ein, so hat man:

$$\frac{2\, dq}{x\, dx} = v \operatorname{cotg} v - \log \sin v - \omega \operatorname{cotg} \omega + \log \sin \omega .$$

183. Um nun auch die zweite Integration auszuführen, durch welche sich die Menge der Strahlen ergibt, die auf das ganze Ebenenstück auffallen, bemerke man, dass man eine Gleichung zwischen der Abscisse x und der Ordinate y kennen muss, falls man die Gestalt des Ebenenstückes als krummlinig annimmt; kennt man diese Gleichung, so eliminirt man die eine oder die andere Variable aus dem Differentialausdruck. Hier wollen wir jedoch annehmen, das Ebenenstück sei ein Rechteck, also es sei $y = \text{Const}$; dann ist diejenige Strahlenmenge zu bestimmen, welche auf das Flächenstück $ARMP$ auffällt. Es wird also

$$2\,dq = v \operatorname{cotg} v\, x\,dx - \log\sin v\, x\,dx - \omega \operatorname{cotg} \omega\, x\,dx + \log\sin\omega\, x\,dx \;.$$

Aber wegen

$$x = \sqrt{y^2 + a^2}\operatorname{tg} v = a \operatorname{tg}\omega$$

wird

$$x\,dx = (y^2 + a^2)\operatorname{tg} v\, d\operatorname{tg} v = a^2 \operatorname{tg}\omega\, d\operatorname{tg}\omega \;,$$

also durch Substitution dieses Ausdrucks:

$$2\,dq = (y^2 + a^2)(v\, d\operatorname{tg} v - \log\sin v \operatorname{tg} v\, d\operatorname{tg} v) - a^2(\omega\, d\operatorname{tg}\omega - \log\sin\omega\operatorname{tg}\omega\, d\operatorname{tg}\omega)$$

und durch Integration wird schliesslich:

$$q = \tfrac{1}{2}(y^2 + a^2)(v\operatorname{tg} v - \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2 v\log\sin v + \tfrac{1}{2}\log\cos v) - \tfrac{1}{2}a^2(\omega\operatorname{tg}\omega - \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2\omega\log\sin\omega + \tfrac{1}{2}\log\cos\omega)\;.$$

Dies ist also die Strahlenmenge, welche auf das Stück $APMR$ von der linken Seite her einfällt. Eine Constante braucht man nicht zuzufügen, da x, v, ω, q gleichzeitig verschwinden.

[**87**] 184. Auf dieselbe Weise ergibt sich die Menge der Strahlen, welche von der rechten Seite her auf das Stück $DPMS$ auffallen, nämlich

$$q' = \tfrac{1}{2}(y^2 + a^2)(QME\operatorname{tg} QME - \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2 QME\log\sin QME + \tfrac{1}{2}\log\cos QME) - \tfrac{1}{2}a^2(QPE\operatorname{tg} QPE - \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2 QPE\log\sin QPE + \tfrac{1}{2}\log\cos QPE)\;,$$

ebenso für das Flächenstück $DARS$

$$q'' = \tfrac{1}{2}(y^2 + a^2)(FRE\operatorname{tg} FRE - \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2 FRE\log\sin FRE + \tfrac{1}{2}\log\cos FRE) - \tfrac{1}{2}a^2(FAE\operatorname{tg} FAE - \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2 FAE\log\sin FAE + \tfrac{1}{2}\log\cos FAE)\;.$$

Daher wird endlich die Strahlenmenge, welche von beiden Seiten auf das Stück $RAPM$ auffällt,

$$Q = q + q'' - q' .$$

185. Diejenige Menge aber, welche auf das ganze Stück $ADSR$ auffällt, ist $= 2q''$, nämlich das Doppelte derjenigen, welche von der rechten oder linken Seite allein auffällt.

186. Diese Strahlenmengen entsprechen dem unendlich grossen höheren Raum $GFEH$. Variirt man daher die Höhe $PQ = a$, so kann man die Strahlenmenge finden, welche einem beliebigen Segment oder dem Rechteck $GADH$ entspricht.

187. Alle diese einzelnen Formeln sind sich einander darin ähnlich, dass in allen dieselbe Function der entsprechenden Winkel auftritt. Wenn man also das Glied

$$\tfrac{1}{2}(v \operatorname{tg} v - \tfrac{1}{2} \operatorname{tg}^2 v \log \sin v + \tfrac{1}{2} \log \cos v) ,$$

[**88**] welches vom Winkel $v = FMQ$ abhängt, der Kürze halber mit $\varphi(v) = \varphi(FMQ)$ bezeichnet, so lässt sich offenbar das Glied

$$\tfrac{1}{2}(\omega \operatorname{tg} \omega - \tfrac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \omega \log \sin \omega + \tfrac{1}{2} \log \cos \omega) ,$$

welches dem Winkel $\omega = FPQ$ entspricht, durch $\varphi(\omega) = \varphi(FPQ)$ ausdrücken. Zieht man hiermit die vorigen weitläufigeren Formeln zusammen, so wird kurz

$$\begin{aligned} Q = &+ (y^2 + a^2)\,\varphi(FMQ) - a^2\varphi(FPQ) \\ &+ (y^2 + a^2)\,\varphi(FRE) - a^2\varphi(FAE) \\ &- (y^2 + a^2)\,\varphi(QME) + a^2\varphi(QPE) , \end{aligned}$$

oder, wenn man dies wieder zusammenzieht,

$$\begin{aligned} Q = (y^2 + a^2)&[\varphi(FMQ) + \varphi(FRE) - \varphi(QME)] \\ - a^2&[\varphi(FPQ) + \varphi(FAE) - \varphi(QPE)] . \end{aligned}$$

188. Setzt man an Stelle des Ebenenstückes $GFEH$ das ganze Ebenenstück $GADH$, so wird $a = 0$ und es ist, wenn man die Menge der einfallenden Strahlen mit R bezeichnet,

$$R = y^2[\varphi(AMP) + \varphi(ARD) - \varphi(PMD)] ,$$

mithin ist die Menge der Strahlen, welche von dem Stück $AFED$ auf das Stück $ARMP$ fallen:

$$\begin{aligned} R - Q = {} & y^2[\varphi(AMP) + \varphi(ARD) - \varphi(PMD)] \\ & + a^2[\varphi(FPQ) + \varphi(FAE) - \varphi(QPE)] \\ & - (y^2 + a^2)[\varphi(FMQ) + \varphi(FRE) - \varphi(QME)] \end{aligned}$$

und dies ist die gesuchte Grösse.

189. Da aber dieser Ausdruck von beiden Ebenenstücken in gleicher Weise abhängt, so folgt hieraus:

[**89**] 190. **Lehrsatz 15.** *Die Strahlenmenge, welche von der Ebene AFED auf die Ebene ARMP auffällt, ist derjenigen gleich, welche umgekehrt von der Ebene ARMP auf die Ebene AFED auffällt, vorausgesetzt, dass in beiden Fällen die Intensität der leuchtenden Ebene dieselbe ist.*

Beweis: Denn durch Vergleichung sieht man, dass zu setzen ist

statt der Höhe a	die Höhe y	
» » Länge y	» Länge a	
» des Winkels AMP	der Winkel FPQ	und umgekehrt
» » » FAE	» » ARD	
» » » QPE	» » PMD	
statt des Winkels FMQ	die gleichen Winkel.	
» FRE		
» QME		

Hieraus ergibt sich aber derselbe Ausdruck. Man wird übrigens später sehen, dass dieser Satz noch viel allgemeiner gilt.

191. Setzt man statt des Stückes $ARMP$ das ganze Ebenenstück $ARSD$, so zieht sich die Formel bedeutend zusammen und es wird

$$R - Q = 2y^2\varphi(ARD) + 2a^2\varphi(FAE) - 2(y^2 + a^2)\varphi(FRE).$$

192. Nimmt man dann auch die ganze Ebene $GADH$, so wird (188)

$$R = 2y^2\varphi(ARD)$$

und dies ist zugleich die Menge der Strahlen, welche im zweiten Fall des vorstehenden Lehrsatzes von dem Stück $ARSD$ aus auf die unendlich hohe Ebene $GADH$ gesandt werden (190).

193. Setzt man in ähnlicher Weise die Ebene $BADC$ unendlich lang, während die Breite AD die gleiche bleibt, so wird [**90**] die Strahlenmenge, welche die Ebene $AFED$ nach der ersteren hinsendet, $= 2a^2\varphi(FAE)$.

194. Denkt man sich jetzt das Ebenenstück $AFED$ in der Weise von 4 Seitenflächen umgrenzt, dass sie zur Basis eines

unendlich langen Prismas wird, so müssen offenbar alle Strahlen, die von ihr ausgehen, auf die eine oder die andere dieser Seitenflächen auffallen. Daher wird die Menge aller Strahlen, welche überhaupt von der Ebene $AFED$ ausgehen, $E = 8\,a^2\varphi(FAE)$, oder, wenn man den Winkel FAE mit γ bezeichnet, so wird diese Menge:

$$E = 4\,a^2[\gamma \operatorname{tg}\gamma - \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2\gamma \log\sin\gamma + \tfrac{1}{2}\log\cos\gamma] \; .$$

Dies gilt jedoch nur dann, wenn die Seiten der Ebene $AFED$ gleich sind; in diesem Falle ist aber $\gamma = 45^\circ = \frac{1}{4}\pi$, $\operatorname{tg}\gamma = 1$, $\sin\gamma = \cos\gamma$, daher geht die Formel über in die folgende höchst einfache:

$$E = a^2\pi \; .$$

195. Sind dagegen die Seiten a und b ungleich, so werden auch die Lichtmengen, welche auf zwei anstossende Seitenflächen auffallen, ungleich sein. Mithin hat man in diesem Falle

$$E = 4\,a^2\varphi(FAE) + 4\,b^2\varphi(EAD) \; .$$

Es ist aber $EAD = 90^\circ - FAE = \frac{1}{2}\pi - \gamma$, mithin wird

$$E = 2\,a^2\gamma\operatorname{tg}\gamma - a^2\operatorname{tg}^2\gamma\log\sin\gamma + a^2\log\cos\gamma$$
$$+ 2\,b^2(\tfrac{1}{2}\pi - \gamma)\operatorname{cotg}\gamma - b^2\operatorname{cotg}^2\gamma\log\cos\gamma + b^2\log\sin\gamma \; .$$

Da aber $a\operatorname{tg}\gamma = b$, $b\operatorname{cotg}\gamma = a$ ist, so wird einfach

$$E = ab\pi \; .$$

Daher besteht auch hier die Ausstrahlung aus der gleichen Strahlenmenge wie die absolute Beleuchtung. Diese Beziehung werden wir nun für eine jede beliebige gegenseitige Beleuchtung beweisen (129).

[91] 196. **Lehrsatz 16.** Sind die zwei Flächen $ALKD$ und FEI, welche mit gleicher Intensität leuchten, sich in irgend einer Weise einander zugewandt, so ist die von einer jeden auf die andere auffallende Strahlenmenge in beiden Fällen dieselbe.

Beweis: 1) Betrachtet man die zwei Flächenelemente AH und GF, so wird sich die Strahlenmenge, welche von dem einen auf das andere auffällt, ausdrücken durch das Product aus beiden Flächeninhalten, dem Sinus des Incidenz- und dem Sinus des Emanations-

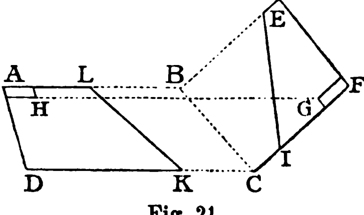


Fig. 21.

winkels. Nun sind aber die Flächeninhalte in den beiden Fällen dieselben und ebenso sind die auftretenden Sinus die gleichen; da also das fragliche Product in beiden Fällen dasselbe ist, so müssen offenbar von *AH* aus eben so viele Strahlen nach *GF* gelangen, wie von *GF* nach *AH*.

2) Hält man das Element *AH* fest, so gilt offenbar das Gesagte auch für jedes beliebige Element der Fläche *FEI*; vereinigt man daher diese einzelnen Beleuchtungen zu einer Summe, so wird von der ganzen Fläche *FEI* auf das Element *AH* dieselbe Strahlenmenge auffallen, wie umgekehrt vom Element *AH* auf die Fläche *FEI*.

3) Da dasselbe auch von den einzelnen Elementen der Fläche *ALKD* gilt, so wird es auch für deren Summe gelten. Hieraus folgt der Satz.

197. Da man also durch eine und dieselbe Operation beide Mengen bestimmen kann, so liefert uns der vorstehende Satz für die ganze Photometrie ein ausgezeichnetes Mittel, die Rechnung zu vereinfachen. Denn man kann nicht nur eine Wiederholung derselben ersparen, [**92**] sondern es wird auch in solchen Fällen, wo die eine Aufgabe schwieriger ist als die andere, hinreichend sein, dieselbe umzukehren und die leichtere zu behandeln.

198. Wenn man statt der einen Fläche nur ein unendlich kleines Element derselben betrachtet, wie z. B. *AH*, so braucht man den Flächeninhalt desselben nicht in die Rechnung einzuführen, wenn nicht andere Gründe dies fordern. Denn man kann ein solches Element annehmen, dessen Inhalt $= 1$ gesetzt wird, und dann durch Rechnung die Strahlenmenge bestimmen, welche von diesem Element auf eine gegebene Fläche *FEI*, oder von letzterer auf ersteres auffällt. Muss man aber statt dieses Elements diejenige Grösse einführen, welche die Natur der Rechnung verlangt, z. B. dq, dx, u. s. w., so hat man die Strahlenmenge offenbar mit diesem Flächeninhalt zu multipliciren.

199. Den zwei bisherigen Beispielen wollen wir noch ein drittes anschliessen und dies deshalb genauer entwickeln, weil wir im Folgenden bei Gelegenheit der Untersuchung über die Helligkeit der Bilder im Brennpunkte von Linsen oder Spiegeln ausgedehnteren Gebrauch davon machen werden. Bei dieser Gelegenheit treten nämlich unendlich viele schiefe Strahlenkegel auf, und deshalb wollen wir im Voraus die Strahlenmenge bestimmen, welche einem solchen zukommt.

200. Sei also *BHGF* eine ebene, leuchtende oder beleuchtete Kreisfläche, die wir der grösseren Deutlichkeit wegen

als horizontal liegend annehmen werden. In A befinde sich ein Element einer Fläche, welches der Kreisebene parallel, also horizontal liegt und welches entweder den Kreis BG beleuchtet,

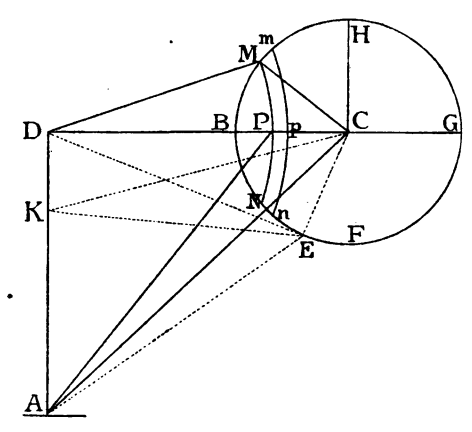


Fig. 22.

oder von ihm beleuchtet wird; dann bilden die austretenden oder auffallenden Strahlen offenbar einen schiefen Strahlenkegel, dessen Grundfläche der Kreis BHG ist und dessen Axe AC mit der Basis einen schiefen Winkel bildet. [93] Da nun das Element in A der Grundfläche parallel ist, so wird die Axe CA gegen dieses Element in der gleichen Weise geneigt sein, und da dies auch für alle anderen Geraden PA gilt, so sind offenbar der Incidenz- und der Emanationswinkel einander gleich. Die Gerade AD stehe vertical, und senkrecht zu ihr ziehe man CD; dann wird D die Projection von A auf die Ebene des Kreises BHG sein, während DAC die Neigung der Axe AC ist. Endlich werde der Inhalt des Elements A mit 1 bezeichnet.

201. Nimmt man einen beliebigen Punkt P, zieht AP und lässt das Dreieck DPA um die Axe AD rotiren, so wird der Punkt P offenbar einen Kreisbogen MPN beschreiben, und wenn man sich unendlich benachbart dazu in gleicher Weise den Bogen mpn denkt, so erhält man ein ringförmiges Segment $MNnm$, für welches alle Strahlen denselben Emanations- und Incidenzwinkel haben. Man bestimme zuerst die Menge *dieser* Strahlen, die wir mit dq bezeichnen werden.

202. Hierzu setze man

die Höhe des Scheitels $DA = 1$
die Entfernung des Centrums $CD = a$
den Halbmesser $CB = x$

Ferner ziehe man DM und CM, und bezeichne:

die Strecke $DP = DM = z$
den Winkel $MDC = v$
» » $MCH = -\xi$
» » $DAP = \omega$,

dann wird

$$z = \operatorname{tg} \omega$$

$$AP = \sqrt{1 + z^2} = \sec \omega$$

$$\text{Inhalt } MNnm = 2vz\,dz = \frac{2v \sin \omega \, d\omega}{\cos^3 \omega} .$$

Da sich nun die Strahlenmenge direct verhält [94] wie der Flächeninhalt und die Sinus des Emanations- und Incidenzwinkels, dagegen umgekehrt wie das Quadrat der Entfernung, so erhält man:

$$dq = 2v \frac{\sin \omega \, d\omega}{\cos^3 \omega} \cdot \cos \omega \cdot \cos \omega \cdot \frac{1}{\sec^2 \omega} ,$$

oder nach gehöriger Vereinfachung

$$dq = 2v \sin \omega \, d \sin \omega .$$

Hieraus folgt:

$$dq = d(v \sin^2 \omega) - \sin^2 \omega \, dv .$$

203. Es ist aber im Dreieck MDC

$$2az \cos v = z^2 + a^2 - x^2 .$$

Setzt man daher der Kürze wegen

$$a^2 = b^2 + x^2 ,$$

so wird

$$2a \cos v = z + \frac{b^2}{z} ,$$

und hieraus

$$-dv = \frac{z\,dz - \frac{b^2}{z} dz}{\sqrt{4a^2z^2 - (z^2 + b^2)^2}}$$

und da

$$\sin^2\omega = \frac{z^2}{1+z^2},$$

so wird

$$-\sin^2\omega\, dv = \frac{(z^2-b^2)\, z\, dz}{(1+z^2)\sqrt{4a^2z^2-(z^2+b^2)^2}}.$$

Ferner setze man

$$z^2+b^2 = 2y+2a^2$$

oder

$$z^2 = 2y+a^2+x^2,$$

dann wird

$$-\sin^2\omega\, dv = \frac{(x^2+y)\, dy}{(1+a^2+x^2+2y)\sqrt{a^2x^2-y^2}}.$$

[95] Um diesen Ausdruck eleganter zu machen, zerlege man ihn und verwandle ihn in

$$-\sin^2\omega\, dv = \frac{dy}{2\sqrt{a^2x^2-y^2}} - \frac{(1+b^2)\, dy}{2(1+a^2+x^2+2y)\sqrt{a^2x^2-y^2}}.$$

204. Endlich setze man:

$$1+b^2 = 2cax \qquad \text{oder} \qquad c = \frac{1+b^2}{2ax}$$

$$1+a^2+x^2 = 2eax \qquad \text{oder} \qquad e = \frac{1+a^2+x^2}{2ax}$$

$$y = axs \qquad \text{oder} \qquad s = \frac{y}{ax} = \frac{z^2-a^2-x^2}{2ax}.$$

Setzt man dies ein, so wird:

$$-2\sin^2\omega\, dv = \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} - \frac{c\, ds}{(e+s)\sqrt{1-s^2}},$$

woraus sogleich hervorgeht, dass s der Sinus eines gewissen Bogens sein muss. Vergleicht man aber seinen Ausdruck

$$-s = \frac{a^2+x^2-z^2}{2ax}$$

mit dem Dreieck DMC, so findet man leicht

$$\frac{a^2+x^2-z^2}{2ax} = \cos MCD.$$

Daher hat man

$$s = \cos MCG = \sin(-HCM) = \sin\xi.$$

205. Setzt man dies also ein, so wird

$$-2\sin^2\omega\, dv = d\xi - \frac{c\,d\xi}{e+\sin\xi},$$

also

$$dq = d(v\sin^2\omega) + \tfrac{1}{2}d\xi - \frac{1}{2}\,\frac{c\,d\xi}{e+\sin\xi}.$$

[96] 206. Um ferner das letzte Glied dieser Gleichung von der Irrationalität zu befreien, setze man

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\xi = \zeta,$$

dann wird

$$\sin\xi = 2\frac{\zeta}{1+\zeta^2} \qquad d\xi = 2\frac{d\zeta}{1+\zeta^2},$$

und hieraus

$$\frac{c\,d\xi}{e+\sin\xi} = \frac{2c\,d\zeta}{e+e\zeta^2+2\zeta}.$$

Das Integral hiervon ist

$$\frac{2c}{\sqrt{e^2-1}}\operatorname{arc\,tg}\frac{e\zeta+1}{\sqrt{e^2-1}}.$$

Daher hat man

$$q = v\sin^2\omega + \tfrac{1}{2}\xi - \frac{c}{\sqrt{e^2-1}}\operatorname{arc\,tg}\frac{e\zeta+1}{\sqrt{e^2-1}} + \text{Const.}$$

Die Constante ist so zu bestimmen, dass q verschwindet, wenn $z = DB$ ist. In diesem Fall ist aber $v = 0$, $-\xi = \frac{1}{2}\pi$, $\zeta = -1$; mithin ist

$$\text{Const} = \tfrac{1}{4}\pi - \frac{c}{\sqrt{e^2-1}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{e-1}{e+1}}$$

und hiernach ist die Strahlenmenge, welche dem linsenförmigen Stück $MBNP$ entspricht.

$$q = v\sin^2\omega + \tfrac{1}{2}\xi + \tfrac{1}{4}\pi$$
$$-\frac{c}{\sqrt{e^2-1}}\left(\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{e-1}{e+1}} + \operatorname{arc\,tg}\frac{e\zeta+1}{\sqrt{e^2-1}}\right).$$

[97] 207. Sucht man jetzt die Strahlenmenge für den ganzen Kreis, so ist zu setzen $z = DG$, und hieraus folgt $v = 0$, $\xi = +\frac{1}{2}\pi$, $\zeta = +1$; dann ist

$$Q = \frac{1}{2}\pi - \frac{c}{\sqrt{e^2 - 1}}\left(\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{e+1}{e-1}} + \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{e-1}{e+1}}\right),$$

da aber

$$\sqrt{\frac{e+1}{e-1}} = 1 : \sqrt{\frac{e-1}{e+1}},$$

so ist der eine Bogen das Complement des anderen, sodass also die Summe beider einen Quadranten $= \frac{1}{2}\pi$ beträgt; daher zieht sich der Ausdruck so zusammen, dass man für den ganzen Kreis erhält:

$$Q = \frac{1}{2}\pi\left(1 - \frac{c}{\sqrt{e^2 - 1}}\right).$$

Es ist aber

$$c = \frac{1 + a^2 - x^2}{2ax} \qquad e = \frac{1 + a^2 + x^2}{2ax}.$$

Mithin wird endlich durch Substitution

$$Q = \frac{1}{2}\pi\left(1 - \frac{1 + a^2 - x^2}{\sqrt{(1 + a^2 - x^2)^2 + 4x^2}}\right).$$

In dieser Gleichung ist also die Strahlenmenge für den ganzen Kreis ausgedrückt durch die geradlinigen Strecken AD, DC, BC, welche am leichtesten zu bestimmen sind.

208. Man kann sie jedoch auch durch Winkelgrössen ausdrücken. Zieht man nämlich die Tangente DE, ferner senkrecht zu ihr CE, und verbindet man E mit A, nennt man ferner die Winkel $CDE = w$, $DAE = \varphi$, so wird

$$\begin{aligned} DE^2 &= a^2 - x^2 &&= \operatorname{tg}^2\varphi \\ AE^2 &= 1 + a^2 - x^2 &&= \sec^2\varphi \\ CE &= x &&= \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg} w. \end{aligned}$$

[**98**] Hieraus folgt

$$Q = \frac{1}{2}\pi\left\{1 - \sqrt{\frac{\sec^4\varphi}{\sec^4\varphi + 4\operatorname{tg}^2\varphi\operatorname{tg}^2 w}}\right\}$$

oder

$$Q = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\pi\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 w \sin^2 2\varphi}}.$$

Vom Punkte E aus ziehe man eine Gerade so, dass der Winkel $DKE = 2\varphi = 2\,DAE$ wird, dann ist

$$DE^2 : KE^2 = \sin^2 2\varphi$$
$$EC^2 : KE^2 = \sin^2 2\varphi \operatorname{tg}^2 w$$
$$CK^2 : KE^2 = 1 + \sin^2 2\varphi \operatorname{tg}^2 w \,.$$

Hieraus folgt,

$$Q = \tfrac{1}{2}\pi\,(1 - \cos CKE) = \pi \sin^2 \tfrac{1}{2}\,CKE \,,$$

209. Bei dieser ganzen Rechnung wurde die Höhe oder die Distanz AD der Ebenen als Einheit betrachtet, was jedenfalls erlaubt war (91, 92). In diesem Fall muss man aber die anderen Geraden in dieser Einheit ausdrücken. Um jedoch den zuvor ermittelten Ausdruck jeder beliebigen Maasseinheit anzupassen, bezeichne man die Strecke AD mit h; dann ist offenbar:

$$Q = \tfrac{1}{2}\pi \left\{ 1 - \frac{h^2 + a^2 - x^2}{\sqrt{(h^2 + a^2 - x^2)^2 + 4x^2h^2}} \right\}.$$

210. Die Strahlenmenge Q entspricht dem ganzen Kreise $BHGF$, gleichgiltig ob die Strahlen nun von diesem aus auf das Element $A = 1$, oder von diesem Element auf den Kreis auffallen. Im ersten Fall hat man die Helligkeit oder die Beleuchtung des Elementes A, wenn man seinen Flächeninhalt $= 1$ setzt. Um nun die Uebereinstimmung der ermittelten Formel mit den früheren zu zeigen, werden wir sie auf einige specielle Fälle anwenden.

[99] 211. Setzt man $a = 0$, so fällt das Centrum C des Kreises in den Scheitel D, und es wird

$$Q = \tfrac{1}{2}\pi \left(1 - \frac{h^2 - x^2}{h^2 + x^2}\right) = \pi\,\frac{x^2}{h^2 + x^2}\,.$$

Es ist aber $x^2 : (h^2 + x^2)$ das Quadrat des Sinus des scheinbaren Halbmessers; also wird die Grösse Q demselben proportional, was mit dem früher (109, 121) Bewiesenen übereinstimmt.

212. Setzt man $a = h = 0$, so wird $Q = \pi$, es findet also absolute Beleuchtung statt (100, 123).

213. Setzt man den Halbmesser x unendlich klein, so wird

$$Q = \pi\,\frac{h^2 x^2}{(h^2 + a^2)^2}\,.$$

Es ist aber πx^2 der wahre Inhalt des Kreises, $\pi x^2 h : (h^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}$ dessen scheinbare Grösse und $h : \sqrt{h^2 + a^2}$ der Sinus des Incidenzwinkels, daher ist Q das Product aus diesem Sinus und dem scheinbaren Flächeninhalt, wie man auch ohnedies sieht.

214. Sei jetzt MDE ein Kreis, und senkrecht über seinem Centrum befinde sich das Centrum des Kreises BC, welcher dem ersteren parallel sei; dann wird AC die Axe sein, welche durch die Centra beider Kreise senkrecht hindurchgeht. Man nehme nun den einen von beiden Kreisen als leuchtend an und suche die Strahlenmenge, welche auf den anderen auffällt. Hierzu setze man

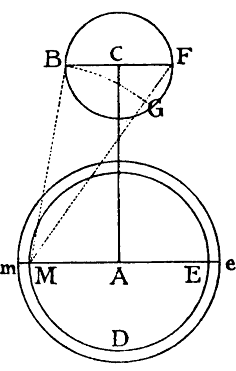


Fig. 23.

die Entfernung beider Kreise . . . $AC = h$
den Halbmesser des leuchtenden Kreises . . . $CB = b$
den Halbmesser des beleuchteten Kreises . . . . $AM = x$

Zum Kreis MDE denke man sich unendlich nahe einen zweiten mit ihm concentrischen me gezogen, und in Mm befinde sich [100] ein Element $= 1$, dann wird die Dichtigkeit der Strahlen, welche auf dieses Element auffallen (209)

$$= \frac{1}{2}\pi\left[1 - \frac{h^2 - b^2 + x^2}{\sqrt{4h^2b^2 + (h^2 - b^2 + x^2)^2}}\right].$$

Da diese Dichtigkeit auf dem ganzen Ring MDE dieselbe ist, so verhält sich die Menge der auf ihn auffallenden Strahlen, wie dessen Flächeninhalt. Derselbe ist aber $= 2\pi x\,dx$; bezeichnet man daher die Strahlenmenge mit dq, so wird

$$dq = \pi^2\left[x dx - \frac{(h^2 - b^2 + x^2)\,x dx}{\sqrt{4h^2b^2 + (h^2 - b^2 + x^2)^2}}\right],$$

und das Integral hiervon ist

$$q = \frac{1}{2}\pi^2\left[x^2 - \sqrt{4h^2b^2 + (h^2 - b^2 + x^2)^2} + \text{Const}\right].$$

215. Die Constante findet man, wenn man beachtet, dass q und x zugleich verschwinden. Sie wird also $= h^2 + b^2$; fügt man diese Grösse hinzu, so wird

$$q = \frac{1}{2}\pi^2\left[x^2 + h^2 + b^2 - \sqrt{4h^2b^2 + (h^2 - b^2 + x^2)^2}\right],$$

oder, wenn man diese Gleichung gehörig reducirt,

$$q = \frac{1}{2}\pi^2\left[h^2 + b^2 + x^2 - \sqrt{(h^2 + b^2 + x^2)^2 - 4x^2b^2}\right].$$

Dieser Werth ist eine Wurzel der Gleichung

$$q^2 - \pi^2(h^2 + b^2 + x^2)\, q + x^2 b^2 \pi^4 = 0 \,.$$

216. Da diese Gleichung von beiden Radien b und x in gleicher Weise abhängt, so muss sich offenbar dieselbe Strahlenmenge ergeben, gleichgiltig welcher von beiden Kreisen als leuchtend angesehen wird (196).

217. Man kann aber auch die gefundene Formel

$$q = \tfrac{1}{2}\pi^2\left[h^2 + x^2 + b^2 - \sqrt{(h^2 + x^2 + b^2)^2 - 4x^2b^2}\right]$$

elegant zusammenziehen. Seien nämlich BCF und MAE einander parallel, und ziehe man MB, MF, so wird

$$MB^2 = h^2 + b^2 + x^2 - 2bx$$
$$MF^2 = h^2 + b^2 + x^2 + 2bx \,,$$

[101] und daher

$$\frac{MB^2 + MF^2}{2} = h^2 + b^2 + x^2$$
$$MB^2 \cdot MF^2 = (h^2 + b^2 + x^2)^2 - 4b^2x^2 \,.$$

Setzt man diese Werthe ein, so hebt sich nicht nur die Irrationalität weg, sondern der Ausdruck verwandelt sich sogar in ein reines Quadrat, und es wird

$$q = \tfrac{1}{4}\pi^2(MF - MB)^2 \,.$$

Hieraus folgt

218. **Lehrsatz 17.** *Ist $BMEF$ ein Strahlenkegel derart, dass von den beiden Schnittflächen BF, ME, welche zur Axe CA normal sind, die eine durch die andere erleuchtet wird, zieht man ferner MF und macht $MG = MB$, so ist die Strahlenmenge dieses Kegels gleich dem Product aus der absoluten Beleuchtung π und der Fläche eines Kreises, dessen Durchmesser $= GF$ ist.*

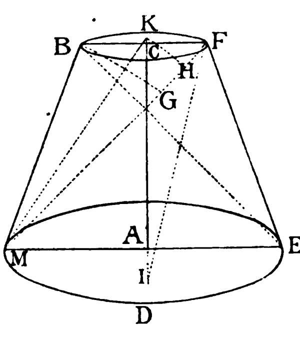


Fig. 24.

Beweis: Nach dem vorigen Paragraphen ist

$$q = \tfrac{1}{4}\pi^2(MF - MB)^2 \,.$$

Nach Construction ist aber

$$MF - MB = GF \,,$$

woraus

$$q = \tfrac{1}{4}\pi^2 GF^2 \,.$$

Es ist aber π die absolute Beleuchtung (123) und $\frac{1}{4}\pi GF^2$ der Inhalt eines Kreises, dessen Durchmesser $= GF$ ist. Hieraus folgt die Behauptung. Nicht weniger elegant ist der folgende

219. **Lehrsatz 18.** *In einem Strahlenkegel $MBFE$ ist die Menge der Strahlen dieselbe wie diejenige, welche im Fall der absoluten Beleuchtung auf den Flächenraum eines Kreises vom Durchmesser GF auffallen würde.*

[**102**] Beweis: π ist die Strahlenmenge, welche im Fall der absoluten Beleuchtung auf ein Flächenstück $= 1$ auffällt; daher wird $q = \frac{1}{4}\pi^2 GF^2$ die Menge sein, welche in demselben Fall auf den Raum $\frac{1}{4}\pi GF^2$ auffällt. Dieser Raum ist aber gleich dem Inhalt eines Kreises, dessen Durchmesser $= GF$ ist. Hieraus folgt die Behauptung.

220. **Lehrsatz 19.** *Wird die Schnittfläche BF von der Schnittfläche ME beleuchtet, so verhält sich die mittlere Helligkeit von BF zu ihrer Helligkeit im Fall der absoluten Beleuchtung, wie GF^2 zu BF^2.*

Beweis: Die mittlere Helligkeit wird gefunden, wenn man die Strahlenmenge des Lichtkegels $MBFE$ durch den Inhalt der Schnittfläche BC dividirt. Dieser Inhalt ist aber $= \frac{1}{4}\pi BF^2$ und die Menge der Strahlen ist (218) $= \frac{1}{4}\pi^2 GF^2$; daher ist die mittlere Helligkeit $GF^2\pi : BF^2$. Da nun die absolute Beleuchtung $= \pi$ ist, so wird

$$\pi \frac{GF^2}{BF^2} : \pi = GF^2 : BF^2 ,$$

wie zu beweisen war.

221. Dasselbe gilt selbstverständlich auch von der Schnittfläche MDE, wenn sie von der Schnittfläche BF erleuchtet wird (216). Es verhält sich nämlich die mittlere Helligkeit zur Helligkeit der absoluten Beleuchtung wie FG^2 zu ME^2. Wegen $FE = BM$ wird aber auch: $FM - FE = FM - BM = FG$ (218). Daher ist es gleichgiltig, ob man das Dreieck MBF odre das Dreieck MFE benutzt, da es hier nur auf die Differenz der Schenkel ankommt.

[**103**] 222. Da die 4 Punkte $BMEF$ nach Construction ein Sehnenviereck bilden, so wird

$$BE \cdot MF = BM \cdot FE + BF \cdot ME .$$

Es ist aber

$$BE = MF \qquad BM = FE ,$$

also

$$MF^2 = BM^2 + BF \cdot ME .$$

Hieraus wird

$$GF = MF - MB = \frac{BF \cdot ME}{MF + MB} .$$

Da nun aber (218)

$$q = \tfrac{1}{4}\pi^2 GF^2 ,$$

so wird

$$q = \tfrac{1}{4}\pi^2 \frac{BF^2 \cdot ME^2}{(MF + MB)^2} .$$

Die Gerade GF möge nun halbirt werden in H, dann wird

$$MH = \tfrac{1}{2}(MF + MB) .$$

Mithin ist

$$q = \pi^2 \frac{BC^2 \cdot MA^2}{MH^2} .$$

Hieraus folgt wieder

223. **Lehrsatz 20.** *Betrachtet man $MH = \frac{1}{2}(MB + MF)$ als Einheit, und bezeichnet man die absolute Beleuchtung mit π, so wird die Menge der Strahlen des Lichtkegels MBFE gleich dem Product aus dem Inhalt der leuchtenden Schnittfläche und dem Inhalt der beleuchteten.*

Beweis: Es ist nämlich

πBC^2 = dem Inhalt der Schnittfläche BCF
πMA^2 = dem Inhalt der Schnittfläche MDE.

[104] Setzt man also $MH = 1$, so wird

$$q = \pi BC^2 \cdot \pi MA^2 ,$$

also gleich dem Product beider Flächen (219).

224. **Lehrsatz 21.** *Die mittlere Helligkeit der beleuchteten Schnittfläche verhält sich zur mittleren Helligkeit bei absoluter Beleuchtung, wie das Quadrat des Halbmessers der leuchtenden Schnittfläche zum Quadrat der Strecke MH.*

Beweis: Man findet die mittlere Helligkeit, wenn man die Menge der Strahlen durch den Inhalt der beleuchteten Fläche dividirt. Bezeichnet man also die mittlere Helligkeit mit c, so wird, wenn die Ebene BF die beleuchtete ist,

$$c = \frac{q}{\pi BC^2} = \frac{\pi AM^2}{MH^2} ,$$

hieraus wird

$$c : \pi = AM^2 : MH^2 .$$

Ist aber die Schnittfläche MDE die beleuchtete, so wird

$$c = \frac{q}{\pi MA^2} = \frac{\pi BC^2}{MH^2},$$

woraus

$$c : \pi = BC^2 : MH^2 .$$

Für beide Fälle gilt also die Behauptung des Lehrsatzes.

225. Wenn man die Strecke MH von M aus nach K hin abträgt, und ebenso von F aus nach I hin, so wird die mittlere Helligkeit

des Schnittes MDE : $\pi \sin^2 KIF$
des Schnittes BF : $\pi \sin^2 MKI$.

[105] *Hieraus folgt die Uebereinstimmung und Analogie zwischen dem gegenwärtigen und dem fünften Lehrsatz* (109). Denn die Winkel MKI, KIF sind die scheinbaren Halbmesser der leuchtenden Segmente, wenn sie von den Punkten K und I aus betrachtet werden.

Kapitel III.

Experimentelle Prüfung des Urtheils des Auges.

Begründung der Principien der Photometrie.

226. Die ersten Grundlagen, auf welche die Photometrie aufgebaut wird, wurden im Früheren (54, 55) als möglicherweise zweifelhaft bezeichnet. Dieselben sollen aber jetzt unter Anwendung aller Strenge nicht, wie man sagen kann, mit der gewöhnlichen Krämerwage, sondern mit Hilfe der Goldwage einer Prüfung unterworfen werden, welche nur dasjenige als sicher und evident gelten lässt, was wirklich vollständig evident ist. Wir betreten dieses Gebiet um so lieber, je ausgedehnter der Gebrauch der Methode ist, deren wir uns hierbei bedienen werden, um alles ins rechte Licht zu setzen.

227. Die Principien nun, deren Richtigkeit hier zu prüfen ist, sind folgende:

1. *Die Beleuchtung wächst nach Maassgabe der Anzahl der Kerzen oder Lichtquellen oder leuchtenden Punkte, durch welche ein ihnen zugewandtes Blatt oder eine Ebene beleuchtet wird.*

2. *Sie nimmt ab mit dem zunehmenden Quadrat der Entfernung der beleuchteten Ebene vom leuchtenden Körper.*
3. *Sie nimmt ab im Verhältniss des Sinus des Incidenzwinkels.*

[**106**] 228. Es wurde schon erwähnt (54), dass sich keines dieser Gesetze für sich allein durch Experimente bestätigen lässt. Ferner haben wir gesehen, dass dann, wenn man irgend eines von ihnen angenommen hat, die anderen durch die Erfahrung geprüft werden können, sodass sich dieselben also gegenseitig entweder bestätigen oder widerlegen (55). Ob nun aber das erste oder das letztere der Fall ist, soll jetzt etwas genauer untersucht werden. Zu diesem Zweck werden wir das erste dieser Gesetze mit dem zweiten und dann mit dem dritten vergleichen, um den Zusammenhang klar zu stellen.

229. Wir nehmen also den früher beschriebenen ersten Versuch (58) wieder vor, oder auch den ihm ähnlichen zweiten (59). Alles, was man aus ihm ohne Hilfe einer Hypothese zu schliessen vermag, kommt darauf hinaus, *dass dieselbe Beleuchtung entsteht, wenn die Anzahl der Kerzen in demselben Verhältniss steht, wie das Quadrat der Entfernung.* Da sich dieser Satz mit Nothwendigkeit ergibt, und da ausser den Fällen des Satzes bei gleichbleibender Helligkeit der Kerzen und gleicher Reflexionsfähigkeit der das Licht senkrecht auffangenden Ebene eine Gleichheit der Beleuchtung nicht stattfinden kann, so werden wir ihn als ein Axiom anwenden.

230. Um jedoch die Methode, deren wir uns bedienen werden, im Voraus durch ein leichteres Beispiel zu illustriren, nehmen wir zunächst an, der Versuch sei so angelegt gewesen, dass die Anzahl der Kerzen in A, Fig. 2, immer gleich der doppelten Anzahl derjenigen in K war, sodass sich also in jedem Falle die Distanz KC zu AB verhält, wie $1 : \sqrt{2}$. Es fragt sich dann, mit welchem Recht man hieraus einen Schluss ziehen kann, der sich allgemeiner auf das Verhältniss einer beliebigen Anzahl von Kerzen erstreckt, sodass sich die Distanz bestimmt, bei welcher dieselbe Beleuchtung durch [**107**] eine beliebige Anzahl von Kerzen entsteht, oder dass umgekehrt letztere durch erstere gefunden wird.

231. Um diese Aufgabe zu lösen, bezeichne man eine beliebige Distanz mit x, die entsprechendeAnzahl der Kerzen mit y. Welches nun auch die Beziehung sein mag, die zwischen diesen Grössen besteht, so muss sie sich doch ganz

allgemein durch eine Reihe von folgender Form ausdrücken lassen:

$$A = y = \alpha + \beta x^m + \gamma x^n + \delta x^p + \cdots .$$

Denn in eine solche Reihe kann man alle beliebigen irrationalen Ausdrücke verwandeln.

232. Es sind nun die Coefficienten und Exponenten dieser Reihe zu ermitteln. Hierzu setze man, entsprechend dem Versuche (230), in dieser Reihe statt der Distanz x die Grösse $x\sqrt{2}$, so muss man offenbar $2y$ anstatt y setzen, und es wird

$$B = 2y = \alpha + \beta x^m 2^{\frac{m}{2}} + \gamma x^n 2^{\frac{n}{2}} + \cdots ,$$

es wird also $2A = B$; und wenn man $2A - B = 0$ setzt, so kommt

$$0 = (2 - 1)\alpha + (2 - 2^{\frac{m}{2}})\beta x^m + (2 - 2^{\frac{n}{2}})\gamma x^n + \cdots .$$

Da aber die Distanz x beliebig sein kann, so spielt sie in dieser Reihe die Rolle der Variablen und daher sind alle Coefficienten $= 0$. Setzt man also

$(2 - 1)\alpha = 0$	so wird $\alpha = 0$		
$(2 - 2^{\frac{m}{2}})\beta = 0$	» $2 = 2^{\frac{m}{2}}$	also	$m = 2$
$(2 - 2^{\frac{n}{2}})\gamma = 0$	» $2 = 2^{\frac{n}{2}}$	»	$n = 2$
⋮	⋮		⋮

Da also alle Exponenten $= 2$ werden, so ist

$$y = \beta x^2 + \gamma x^2 + \delta x^2 + \cdots ,$$

[108] oder

$$y = (\beta + \gamma + \delta + \cdots) x^2 .$$

Bei gleichbleibender Stärke der Beleuchtung verhält sich also die Anzahl der Kerzen wie das Quadrat der Entfernung.

233. Man kann diesen Satz allerdings durch Versuche direct bestätigen. Man suche nämlich, während die Kerze in K stehen bleibt, die Entfernung, bei welcher zwei, drei oder mehr Kerzen dieselbe Beleuchtung erzeugen (58), dann wird sich diese Distanz verhalten wie die Quadratwurzel aus der Anzahl der Kerzen. Indessen ziehen wir es vor, denselben auf indirectem Wege abzuleiten, und zwar wegen der Methode, deren

wir uns bedienen; und aus diesem Grunde werden wir, um die Sache genauer zu entwickeln, bei dieser Aufgabe etwas stehen bleiben. Befinde sich also in A eine Wand oder ein Blatt Papier, oder sonst eine zu beleuchtende Ebene. In B, C, D, E,... mögen sich 1, 2, 3, 4,... Kerzen befinden, welche die Ebene nach einander gleichhell erleuchten. Die Ordinaten Bb, Cc, Dd mögen für jede Distanz die Anzahl der Kerzen bezeichnen. Dann ziehe man die Curve Abf und suche die Gleichung derselben.

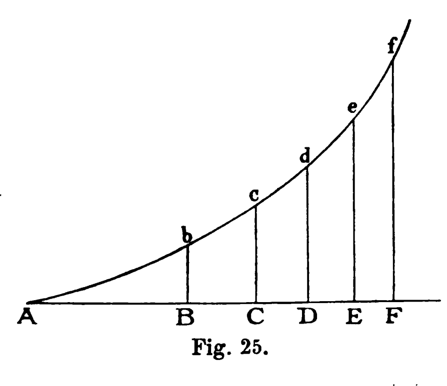


Fig. 25.

234. Die Aufgabe ist also auf die folgende reducirt: *Man soll eine Curve von der Beschaffenheit finden, dass der doppelten Ordinate eine Abscisse entspricht, welche sich zur Abscisse der einfachen Ordinate verhält wie* $\sqrt{2}$ *zu* 1. Man bemerkt sofort, dass diese Curve eine Parabel ist; es muss aber bewiesen werden, dass sie die einzige ist, welche diese Eigenschaft besitzt. Hierin besteht aber gerade die Lösung der vorigen Aufgabe. Bezeichnet man nämlich die Abscisse mit x, die Ordinate mit y, so findet man $y \backsim x^2$.

235. Es ist aber nun zu entscheiden, ob die Curve Abf, welche jenes Verhältniss zwischen der Distanz und der Anzahl der Kerzen ausdrückt, wirklich diese Eigenschaft hat. Zu diesem Zweck kann man die Versuche so anordnen, [109] dass man in beliebiger Entfernung eine beliebige Anzahl von Kerzen aufstellt, welche die Ebene in A beleuchten, und dann die Entfernung sucht, bei welcher die doppelte Anzahl der Kerzen dieselbe Beleuchtung hervorbringt. Wiederholt man diesen Versuch bei einer anderen Distanz und einer anderen Anzahl der Kerzen, hält dabei aber das Verhältniss beider Zahlen fest, so findet sich das Verhältniss der vorhergehenden zur folgenden Distanz $=$ $1 : \sqrt{2}$. Auf diese Weise ergibt sich das Gesetz allgemein, indem es auf die Kerzen in B, C, D, ... angewandt werden kann, so dass, wenn sich Bb zu Cc verhält wie $1 : 2$, auch $AB : AC = 1 : \sqrt{2}$ ist, und in ähnlicher Weise $AC : AE = 1 : \sqrt{2}$. Dies

ist diejenige Form der Aufgabe (234), auf welche wir die vorliegende Frage reducirt haben.

236. Bisher wurde nur dasjenige Verhältniss behandelt, welches zwischen der Entfernung und der Anzahl der Kerzen besteht; auf die Helligkeit der beleuchteten Ebene kann man hieraus noch keinen Schluss ziehen. Um diesen Weg zu betreten, muss man die Annahme machen, dass die Helligkeit in irgend einer Weise von der Distanz und der Anzahl der Kerzen abhänge, dass also bei sonst gleichen Umständen einer gegebenen Distanz und einer gegebenen Anzahl von Kerzen eine gegebene oder bestimmte Beleuchtung entspricht. Da dieselbe also von zwei Variablen abhängt, so bezeichne man die Beleuchtung mit η, die entsprechende Entfernung mit x, die Anzahl der Kerzen mit z; dann kann man η durch eine Reihe ausdrücken, deren einzelne Terme viergliedrig und von folgender Form sind:

$$\eta = a + b z^m + \gamma x^n + \delta z^p x^q ,$$

welcher Ausdruck das allgemeine Glied der ganzen Reihe ist.

[110] 237. Um nun die Exponenten und Coefficienten zu bestimmen, muss man sich erinnern (229), dass die Beleuchtung dieselbe ist, so oft die Anzahl der Kerzen sich verhält wie das Quadrat der Entfernung. Setzt man also x^2 statt z, so wird

$$\eta = \text{Const.} = \alpha + \beta x^{2m} + \gamma x^n + \delta x^{2p+q} .$$

Da aber die Distanz x bei Festhaltung dieser Bedingung beliebig sein kann, so liefert die vorstehende Gleichung nur dann einen constanten Werth für η, wenn

$$m = n = 2p + q = 0 .$$

Denn dann ergibt sich

$$\eta = \alpha + \beta + \gamma + \delta .$$

Diese Constante hängt aber von der Helligkeit oder Leuchtkraft und von der Grösse der Kerzen ab, oder, was auf dasselbe hinauskommt, von der absoluten Beleuchtung.

238. Setzt man die gefundenen Werthe in die Gleichung

$$\eta = \alpha + \beta z^m + \gamma x^n + \delta z^p x^q$$

ein, so erhält man

$$\eta = \alpha + \beta + \gamma + \delta z^p x^{-2p} .$$

Da aber für $z = 0$ auch $\eta = 0$ wird, so ist

$$\alpha + \beta + \gamma = 0 ,$$

also endlich

$$\eta = \delta z^p x^{-2p} .$$

239. Da nun das einzige übriggebliebene Glied der allgemeine Ausdruck für unendlich viele andere ihm ähnliche ist, so kann man allgemein setzen:

$$\eta = a z^m x^{-2m} + b z^n x^{-2n} + c z^p x^{-2p} + \cdots$$

Auf diese Weise wurde die Doppelreihe, deren allgemeines Glied der Ausdruck 236 ist, auf eine einfache Reihe reducirt. Da man diese aber nicht weiter [111] reduciren kann, ohne neue Versuche zu Hilfe zu nehmen, so wollen wir sie inzwischen etwas näher betrachten.

240. Man sieht nämlich sogleich, dass das Gesetz 229, welches wir bisher allein benutzt haben, nicht genügt, die Formel vollständig zu reduciren. Indessen ist sie doch so weit vereinfacht, dass die Beziehung zwischen den Exponenten feststeht und die einzelnen Glieder ähnliche Functionen von z und x sind. Denn sie hängt in derselben Weise direct von der Anzahl der Kerzen ab, wie sie vom reciproken Quadrat der Entfernung abhängt.

241. Wenn man nun die Annahme machen dürfte, die Beleuchtung wachse einfach wie die Anzahl der Kerzen, so würden alle Exponenten = 1 und es würde sein:

$$\eta = (a + b + c + \cdots) \frac{z}{x^2} .$$

242. Würde man dagegen alle Exponenten $m, n, p, \ldots$ einander gleich setzen, so würde folgen:

$$\eta = A \frac{z^m}{x^{2m}} ,$$

die Beleuchtung würde also wachsen wie eine gewisse Potenz der Kerzenanzahl, und abnehmen wie das Quadrat derselben Potenz der Entfernung.

243. Ebenso wie hieraus der Zusammenhang zwischen dem ersten und zweiten Gesetz (227, 228) klargelegt wird, gehen wir jetzt weiter und ziehen auch das dritte Gesetz, welches sich auf den Sinus des Incidenzwinkels bezieht, in Rechnung. Geht man also auf den dritten und vierten der oben beschriebenen Versuche (62, 63) zurück, so folgt aus beiden ohne Hilfe einer Hypothese sofort der Satz: *Die Beleuchtung ist dieselbe, so oft der Sinus des Incidenzwinkels sich direct verhält wie*

das Quadrat der Entfernung und umgekehrt wie die Anzahl der Kerzen. Sei also der Sinus des Incidenzwinkels $= s$, [112] so hat man für die Helligkeit der beleuchteten Ebene die ganz allgemeine Formel:

$$\eta = A + Bz^a + Cx^b + Ds^c + Ez^d x^e + Fz^f s^g + Gx^h s^i + Hz^k x^l s^m ,$$

welches der allgemeine Ausdruck für die Glieder einer unendlichen Reihe ist. Es sind nun die Coefficienten und Exponenten dieser Formel zu bestimmen.

244. Hierzu erinnere man sich, dass die Helligkeit constant bleibt, sobald

$$s = \frac{x^2}{z} ,$$

oder

$$z = \frac{x^2}{s} .$$

Setzt man diesen Werth ein, so erhält man.

$$\eta = \text{Const} = A + Bx^{2a}s^{-a} + Cx^b + Ds^c + Ex^{2d+e}s^{-d} + Fx^{2f}s^{g-f} + Gx^h s^i + Hx^{2k+l}s^{m-k} .$$

Nun soll aber η immer constant sein, sowohl wenn sich x und s zugleich ändern, wie wenn sich eine der Variablen allein ändert. Lässt man also x variiren, und hält s constant, so müssen die einzelnen Glieder der Formel constant sein, also

$$a = b = 2d + e = f = h = 2k + l = 0 .$$

Hält man dagegen x constant und lässt s sich ändern, so wird ebenso

$$a = c = d = g - f = i = m - k = 0 .$$

Hieraus wird wegen $f = 0$ und $d = 0$ auch

$$g = e = 0 .$$

Setzt man dies also ein, so erhält man wegen $k = m$ und $l = -2m$

$$\eta = A + B + C + D + E + F + G + Hz^m s^m x^{-2m} .$$

[113] Nun soll aber η verschwinden, sobald z oder s oder endlich $\frac{1}{x^2} = 0$ ist. Hieraus wird

$$\eta = Hz^m s^m x^{-2m}$$

oder

$$\eta = H\left(\frac{zs}{x^2}\right)^m.$$

245. Dieser Ausdruck ist das allgemeine Glied einer Reihe, deren jedes einzelne Glied eine noch unbestimmte Potenz von $(zs : x^2)$ ist. Daher wird

$$\eta = a\left(\frac{zs}{x^2}\right)^m + b\left(\frac{zs}{x^2}\right)^n + c\left(\frac{zs}{x^2}\right)^p + \cdots$$

246. Setzt man nun, was die grösste Vereinfachung sein würde, alle Glieder ausser dem ersten $= 0$, so wird

$$\eta = a\left(\frac{zs}{x^2}\right)^m.$$

Würde sich also die Helligkeit verhalten wie das Quadrat des Sinus des Incidenzwinkels, so wäre offenbar $m = 2$, und die Helligkeit würde sich demnach auch verhalten, wie das Quadrat der Kerzenanzahl und umgekehrt wie die vierte Potenz der Entfernung. Ferner haben bei derselben Annahme alle Glieder der gefundenen Reihe (245) denselben Exponenten, und es ist $m = n = p = \cdots$ Denn setzt man in der Function (244)

$$\eta = Hz^m x^m : x^{2m}$$

[114] $\eta = s^2$, so würde offenbar

$$1 = Hz^m s^{m-2} : x^{2m} = \text{Const.}$$

Daher muss für jedes einzelne Glied der Exponent $= 2$ sein.

247. Wenn nun aber irgendwo ein Zweifel an der Wahrheit der photometrischen Gesetze von Bedeutung ist, so wird er hier wenigstens ins hellste Licht gerückt. Wir haben nämlich im Früheren den Beweis dafür, *dass die Beleuchtung abnehme wie der Sinus des Incidenzwinkels* (53) nach dem Vorgang aller Schriftsteller der Optik so geführt, dass gezeigt wurde, dass auf die Ebene AB (Fig. 1) eben so viel Strahlen auffallen müssen, wie auf die Ebene AE, welche zur Richtung der Strahlen senkrecht steht. Aber genau gesprochen, würde es, wie man zumeist sofort erkennen wird, voreilig sein, den Schluss zu ziehen, dass die Helligkeit einfach deshalb abnehme, weil die Anzahl der Strahlen, welche schief auffallen, geringer ist als die Anzahl der senkrecht auf dieselbe Ebene auffallenden. Die Sache könnte sich nämlich anders verhalten, wenn man auch Rücksicht nehmen

müsste auf die Schiefe des Stosses, mit welchem die Strahlen die Ebene AB treffen. Wenigstens nehmen die meisten etwas ähnliches an bezüglich der Wärmewirkung der Sonnenstrahlen. Wenn nun dies auch für die Lichtwirkung gelten würde, so würde folgen, dass

$$\eta = z^2 s^2 : x^4 ,$$

und daher würde wider alle Erwartung die Helligkeit zunehmen wie das Quadrat der Anzahl der Kerzen und umgekehrt abnehmen wie die vierte Potenz der Entfernung. Dies ist aber jedenfalls sehr unwahrscheinlich, weil es allen Principien der Mechanik (51) zu widersprechen scheint. Denn viel eher könnte, wenn sich die Kraft verdoppelt, verdreifacht u. s. w., [115] ein Theil der Kraft zerstört werden, statt dass sie sich im Gegentheil noch in stärkerem Maasse vergrössern sollte.

248. Nimmt man dagegen an, dass sich die Helligkeit umgekehrt verhält, wie die einfache Entfernung, so geht die ganze Reihe in die höchst einfache Gleichung über

$$\eta = \frac{\sqrt{z s}}{x} ,$$

die Beleuchtung würde also wachsen, wie die Quadratwurzel aus dem Product der Kerzenanzahl und dem Sinus des Incidenzwinkels. Es würde sich also die Leuchtkraft der schief einfallenden Strahlen, unter Rücksicht auf ihre kleinere Menge, vergrössern. Denn ihre Anzahl ist geringer nach Maassgabe des Sinus des Incidenzwinkels s. Es ist aber $\sqrt{s} : s > 1$.

249. Setzt man aber $\eta \backsim z$ oder $\eta \backsim s$, oder endlich $\eta \backsim 1 : x^2$, so wird sich für jede dieser Annahmen nach Substitution des betreffenden Werthes die ganze Reihe (245)

$$\eta = a\left(\frac{z s}{x^2}\right)^m + b\left(\frac{z s}{x^2}\right)^n + c\left(\frac{z s}{x^2}\right)^p + \cdots$$

auf das einzige Glied reduciren:

$$\eta = A\frac{z s}{x^2} .$$

Hieraus folgt mit Evidenz, dass jene drei photometrischen Gesetze (227) richtig sind, sobald nur ein einziges von ihnen richtig ist. Setzt man also z. B.

$$\eta \backsim s ,$$

so wird durch Substitution dieses Werthes

$$s = a\left(\frac{z\,s}{x^2}\right)^m + b\left(\frac{z\,s}{x^2}\right)^n + c\left(\frac{z\,s}{x^2}\right)^p + \cdots$$

[116] und daher

$$1 = a z^m s^{m-1} x^{-2m} + b z^n s^{n-1} x^{-2n} + c z^p s^{p-1} x^{-2p} + \cdots$$

Hält man nun z und x constant, lässt dagegen s variiren, so müssen alle Glieder der Reihe constant sein, und man muss aus diesem Grund setzen $m - 1 = 0$ oder $m = 1$, und ebenso $n = 1$, $p = 1$. Daraus geht nach Substitution dieser Werthe die Gleichung hervor

$$\eta = a\,\frac{z\,s}{x^2} + b\,\frac{z\,s}{x^2} + c\,\frac{z\,s}{x^2} + \cdots$$

oder einfach

$$\eta = A\,\frac{z\,s}{x^2}\,.$$

Dasselbe findet man, wenn man $\eta \backsim z$ oder $\eta \backsim 1 : x^2$ setzt.

250. Die wahrscheinlichste Annahme ist aber diejenige, dass sich die entwickelte Reihe auf ihr erstes Glied reducire, so dass also

$$\eta = A\left(\frac{z\,s}{x^2}\right)^m.$$

Hieraus folgt aber

$$\frac{z\,s}{x^2} = \left(\frac{\eta}{A}\right)^{\frac{1}{m}}.$$

Daher könnte man, auch wenn m nicht $= 1$ wäre, dennoch denselben Calcül anwenden, welcher früher benutzt wurde. So oft nämlich früher zwei oder mehrere Helligkeiten einander gleich waren, werden sie auch jetzt durch die obige Beziehung als gleich bestimmt. Sind sie aber ungleich, so bestünde der einzige Unterschied darin, dass man jetzt statt der Helligkeiten, die zu vergleichen sind, deren $m$te Wurzel zu setzen hat. Dass dies auch dann gilt, [117] wenn man die ganze Reihe beibehält, sieht man von selbst.

251. Wie man aber auch den Exponenten m, falls er von der Einheit verschieden sein soll, bestimmen mag, so bleibt immer ein offener Widerspruch gegen die gewöhnliche Erfahrung bestehen. Da nämlich die Helligkeit einer beleuchteten Ebene

nichts anderes ist, als die Lichtmenge, welche auf die gegebene Fläche auffällt, und da ebenso die scheinbare Helligkeit (37) des leuchtenden Gegenstandes nach der Lichtmenge beurtheilt wird, welche durch die Pupille auf die Netzhaut des Auges fällt und dort das Bild des Gegenstandes erzeugt, so folgt, dass bei gleichbleibender Oeffnung der Pupille ein Gegenstand um so heller erscheint, je dichter das Licht ist, welches durch die Pupille auf einen gegebenen Punkt des Bildes auffällt. Vergrössert sich nun die scheinbare Oberfläche des Objectes, so wird in demselben Maasse auch der Flächeninhalt des Bildes zunehmen; und wenn sich nun die einfallende Lichtmenge in demselben Maasse vergrössert, oder wenn $m = 1$ ist, so muss jedenfalls die Helligkeit des Bildes dieselbe bleiben. Wenn also der Gegenstand immer mit der gleichen Intensität leuchtet, so wird er auch, unabhängig von seiner scheinbaren Grösse, immer gleich hell erscheinen. Setzt man dagegen $m = 2$, so wird $\eta = z^2$ (246); wenn sich also die scheinbare Grösse des Gegenstandes verdoppelt, so wird sich die in das Auge tretende Lichtmenge vervierfachen. Da sich aber der Flächeninhalt des Bildes auf der Netzhaut nur verdoppelt, so muss folglich das auf denselben Punkt des Bildes auffallende Licht doppelt so dicht sein. Daher würde die Helligkeit des Bildes um so grösser oder intensiver sein, je grösser die scheinbare Grösse des Gegenstandes ist. Dies steht aber mit der Wirklichkeit jedenfalls nicht in Einklang; denn bei gleichbleibender Oeffnung der Pupille [**118**] sieht man einen Gegenstand eben so hell, wenn man seine ganze Oberfläche anblickt, wie wenn man nur einen Theil derselben ins Auge fasst. Dasselbe gilt, wenn man $m = 3, 4, \cdots$ setzt und umgekehrt auch für $m = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots$; denn in den letzteren Fällen würde sich bei zunehmender Oberfläche des gleichmässig leuchtenden Objectes die scheinbare Helligkeit vermindern wie die Quadrat- oder Kubikwurzel u. s. w. der scheinbaren Fläche, sodass für eine doppelt so grosse Fläche die Helligkeit $= \sqrt{\frac{1}{2}}$ wäre, u. s. w.

252. Man nehme nun drei gleich helle Kerzen und stelle sie in verschiedenen Entfernungen von der beleuchteten Ebene so auf, dass die Beleuchtung infolge der nächststehenden gleich wird der Beleuchtung, welche von den beiden anderen zusammen herrührt. Die Entfernung der ersten heisse x, die der zweiten ξ, die der dritten y, und es seien die entsprechenden Beleuchtungen η, η', η''. In der allgemeinen Formel (244) wird also wegen $z = s = 1$:

$$\eta = H : (x^2)^m \qquad \eta' = H : (\xi^2)^m \qquad \eta'' = H : (y^2)^m .$$

Hat man aber den Versuch auf die beschriebene Art ausgeführt, so wird man dann $\eta' + \eta'' = \eta$ finden, wenn

$$\frac{1}{y^2} + \frac{1}{\xi^2} = \frac{1}{x^2}$$

ist. Substituirt man daher diesen Werth, so folgt

$$\eta = \eta' + \eta'' = H\left(\frac{1}{y^2} + \frac{1}{\xi^2}\right)^m = H\left(\frac{1}{y^2}\right)^m + H\left(\frac{1}{\xi^2}\right)^m$$

und daher:

$$\left(\frac{1}{y^2} + \frac{1}{\xi^2}\right)^m = \left(\frac{1}{y^2}\right)^m + \left(\frac{1}{\xi^2}\right)^m .$$

[119] Da aber in dieser Gleichung y und ξ variabel sind, so kann sie nur dann bestehen, wenn $m = 1$ ist. Hieraus folgt allgemein (249):

$$\eta = \frac{zs}{x^2} .$$

253. Um aber nichts unerörtert zu lassen, wollen wir die Sache auf die Spitze treiben. Man könnte nämlich die Annahme in Zweifel ziehen, dass die Summe der Helligkeiten der beiden entfernteren Kerzen, wenn sie sich auf der beleuchteten Ebene vereinigen, gleich gross ist wie die Summe der einzelnen Helligkeiten, jede für sich betrachtet, d. h. also ob man dann, wenn die Versuche zeigen, dass die Beleuchtung in beiden Fällen gleich ist, auch setzen dürfe: $\eta' + \eta'' = \eta$. Wenn man dies nicht für zulässig hält, so darf man auch nicht setzen:

$$H\left(\frac{1}{x^2}\right)^m = H\left(\frac{1}{y^2}\right)^m + H\left(\frac{1}{\xi^2}\right)^m ,$$

sondern es ist zu setzen:

$$H\left(\frac{1}{x^2}\right)^m = H\left(\frac{1}{y^2} + \frac{1}{\xi^2}\right)^m$$

und es wird auch nicht sein

$$\eta = \eta' + \eta'' ,$$

sondern es wird

$$\frac{\eta}{H} = [(\eta' : H)^{\frac{1}{m}} + (\eta'' : H)^{\frac{1}{m}}]^m .$$

Es scheint mir aber nach dem Vorgebrachten höchst überflüssig, weiter zu untersuchen, ob die Natur wirklich so weit von dem einfachsten Wege abweicht. Wenn aber jemand meint, ich habe mich hierbei unnöthig lange aufgehalten, so ist mir dies gleichgiltig, da es mit Absicht geschehen ist. Dass die angewandte Methode nicht wenig dazu beiträgt, den Zusammenhang zwischen den photometrischen Grundgesetzen zu erläutern, [**120**] wurde schon anfangs (226) erwähnt. Denn mit Hilfe unserer Methode haben wir gesehen, dass dieser Zusammenhang so eng ist, dass bei der geringsten Aenderung des einen dieser Gesetze auch die anderen sich in derselben Weise ändern müssen (247, 248). Denn sobald man annimmt, die Beleuchtung wachse wie das Quadrat des Sinus des Incidenzwinkels, muss man auch annehmen, sie wachse wie das Quadrat der Anzahl der Kerzen, und nehme umgekehrt ab, wie das Biquadrat der Entfernung.

254. Das vierte Gesetz, welches sich auf den Emanationswinkel bezieht, haben wir nicht in Erwägung gezogen, da es von den übrigen nicht abhängt und durch besondere Versuche bewiesen wird. (74 fgde.)

255. Die Versuche, welche gelegentlich der früheren Entwickelungen angestellt wurden, sind dort nicht eingefügt worden, da der geeignetere Platz hier ist, wo das Urtheil des Auges zu prüfen ist, und die Vorsichtsmaassregeln anzugeben sind, durch die man den Täuschungen des Auges begegnen kann.

256. **Beispiele zu Versuch 2.** Die Decke und Wände eines Zimmers waren mit geschwärzten Brettern belegt und nur in der Nähe des Ofens war ein Stück der ganz weissen Mauer unüberzogen gelassen; dasselbe möge durch die Gerade $\beta\,\alpha$ dargestellt werden. Diesem Stück der Mauer gegenüber stellte ich eine Kerze L auf, während ein Brett in C so dazwischengestellt wurde, dass dasselbe die ganze Mauer beschattete. Ferner wurden in B drei Spiegel aufgestellt, in der Weise, dass sie das Licht der Kerze nach β warfen und die Distanz $LB + B\beta$ für alle die gleiche wurde. Da nun die Incidenzwinkel wenig von einander verschieden waren, so hätten die drei Räume in β, welche von den Spiegeln beleuchtet wurden, eigentlich gleich hell sein [**121**] müssen. Da ich aber eine kleine

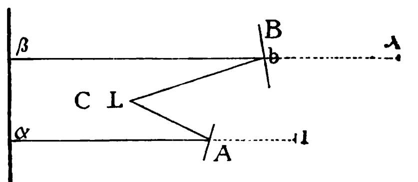


Fig. 26.

Verschiedenheit der Helligkeit bemerkte, so musste ich schliessen, dass diese Spiegel das Licht nicht gleich stark reflectirten. Der Spiegel, welcher die Mitte hielt, wurde also bei Seite gesetzt und die beiden anderen, nämlich der hellste und der dunkelste, wurden in B und b so aufgestellt, dass sie das Licht auf denselben Raum in β werfen und dass $Lb + b\beta = LB + B\beta$ wurde. Der dritte Spiegel wurde in A aufgestellt, und dann wurde durch Versuche die Distanz AL oder $A\alpha$ so bestimmt, dass der Raum α, auf welchen das Licht der Kerze fiel, durch diesen einzigen Spiegel eben so hell erleuchtet wurde, wie der Raum β von den zwei Spiegeln B und b. Sodann wurden die Distanzen $A\alpha$, AL, $B\beta$, BL in Zollen und Linien des Pariser Fusses gemessen. Der Versuch wurde fünf mal wiederholt, und es fand sich

beim	1.	2.	3.	4.	5. Versuch:
$LB =$	35″ 8‴	33″ 7‴	69″ 5‴	69″ 2‴	28″ 7½‴
$B\beta =$	64 11	86 1½	97 4	101 6	48 1
$LA =$	21 1	18 4	48 4	46 2	17 0
$A\alpha =$	50 1½	70 6½	71 9	73 5	36 7½

257. Um nun durch diese Versuche zu zeigen, dass sich die Anzahl der Kerzen verhält, wie das Quadrat der Entfernung, muss man bemerken, dass an Stelle der mehrfachen Kerzen hier die verschiedenen Bilder der einzigen Kerze L treten. Diese Bilder befinden sich hinter den Spiegeln und daher waren die fraglichen Entfernungen:

$$\lambda\beta = \beta B + BL$$
$$l\alpha = \alpha A + AL .$$

Es war also bei unseren Versuchen:

$\lambda\beta =$	100″ 7‴	119″ 8½‴	166″ 9‴	170″ 8‴	76″ 8½‴
$l\alpha =$	71 2½	88 6½	120 1	119 7	53 7½ .

[122] 258. Nun befanden sich in λ zwei Bilder, in l nur eins. Deshalb muss sein

$$\lambda\beta^2 : \alpha l^2 = 2 : 1$$

oder

$$\lambda\beta : \alpha l = \sqrt{2} : 1 = 1 : \sqrt{\tfrac{1}{2}} .$$

Es war aber

beim 1. Versuch:	$\alpha l : \beta \lambda =$	0.70795
» 2. »		0.73933
» 3. »		0.72083
» 4. »		0.70068
» 5. »		0.69908.
Das Mittel hieraus gibt	$\alpha l : \beta \lambda =$	0.71357
es ist aber	$\sqrt{\frac{1}{2}} =$	0.70711
also bleibt die Differenz	$=$	0.00646.

259. Man sieht also, dass die einzelnen Versuche wenig von dem Verhältniss $1 : \sqrt{\frac{1}{2}}$ abweichen. Die grösste Differenz, nämlich diejenige des zweiten Versuches, beträgt 0.03222, ist also nicht grösser als der dreissigste Theil der grösseren Distanz $\beta \lambda$. Diese Distanz beträgt aber 119″ 8½‴, daher ist jene Differenz sehr nahe = 4 Zoll, um welchen Betrag die Distanz αl hätte kleiner sein sollen. Dies würde aber stattgefunden haben, wenn der Spiegel A der Kerze um 2 Zoll näher gestanden hätte. Dieser Umstand zeigt aber gerade, dass eine andere Ursache vorhanden war, da sich schon bei einer Verschiebung des Spiegels um nur einen halben Zoll eine Veränderung der Helligkeit entschieden erkennen liess. Was nun auch die Ursache des Fehlers gewesen sein mag, so wollte ich diesen Versuch dennoch nicht unterdrücken, da ich mehrere derart nicht angestellt habe. Uebrigens wird der Werth des Versuchs unten noch erörtert werden.

[**123**] 260. **Versuch 5.** In L (Fig. 27) wurde wieder eine Kerze aufgestellt, und in C ein Gegenstand, welcher die Mauer $\alpha\beta$ beschattete; der hellste unter den Spiegeln wurde in B, der dunkelste in b aufgestellt, dagegen derjenige, welcher als der mittlere bezeichnet wurde, in A, und zwar derart, dass die Spiegel B und b das Licht der Kerze auf denselben Punkt β der Mauer warfen und dass die Helligkeit der Mauer in α, welche von der Lichtquelle A kam, ebenso hell erschien, wie die Helligkeit in β, welche von den beiden Spiegeln B und b herrührte. Hierauf wurden die Ent-

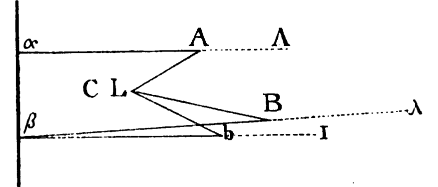


Fig. 27.

fernungen der Spiegel von der Mauer und der Kerze gemessen. Der Versuch wurde viermal angestellt und es war:

	1)	2)	3)	4)
AL	20″ 0‴	26″ 9‴	31″ 1‴	44″ 10‴
$A\alpha$	36 3	41 6	66 10	79 2
bL	25 6	32 0	41 3	62 7
$b\beta$	47 3	54 1	85 2	101 5
BL	32 6	45 6	60 6	77 2
$B\beta$	55 10	65 5	101 8	116 0

261. Nun sind auch hier die Distanzen der Bilder Λ, l, λ zu bestimmen; dieselben waren also

$\Lambda\alpha$	56″ 3‴	68″ 3‴	97″ 11‴	124″ 0‴
$l\beta$	72 9	86 1	126 5	164 0
$\lambda\beta$	88 4	110 11	162 2	193 2

262. Da bei diesen Versuchen die Entfernung der Bilder ungleich ist, so muss sein

$$\frac{1}{\Lambda\alpha^2} = \frac{1}{l\beta^2} + \frac{1}{\lambda\beta^2}\,.$$

Man kann diese Formel elegant construiren. *Man trage die Distanzen der beiden entfernteren Bilder von β aus nach λ und l hin so auf, dass die Geraden $\beta\lambda$ und βl auf einander senkrecht stehen.* [124] *Zieht man dann die Hypotenuse und fällt das Perpendikel $\beta\Lambda$, so ist dieses gleich der Distanz des nächsten Bildes Λ.* Denn in jedem Dreieck verhalten sich die Höhen umgekehrt wie die Seiten, auf denen sie senkrecht stehen. Im rechtwinkligen Dreieck ist aber das Quadrat der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate der beiden Katheten und je die eine Kathete als Höhe steht senkrecht auf der anderen Kathete als Seite. Setzt man also den Inhalt des Dreiecks $= 1$, so

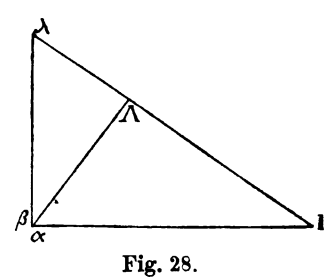


Fig. 28.

wird die Hypotenuse $\lambda l = 1 : \alpha \varDelta$, die Kathete $\beta \lambda = 1 : \beta l$, die Kathete $\beta l = 1 : \beta \lambda$; daher ist

$$\frac{1}{\alpha \varDelta^2} = \frac{1}{\beta l^2} + \frac{1}{\beta \lambda^2} .$$

Bezeichnet man ferner die Helligkeit, welche der nächsten Kerze entspricht, mit $l\lambda$, so entspricht der folgenden Kerze eine Helligkeit $= \lambda \varDelta$, und der entferntesten entspricht $\varDelta l$; sie verhalten sich also wie die Basisabschnitte zur ganzen Basis des rechtwinkligen Dreiecks.

263. Hier ist jedoch die Rechnung vorzuziehen. Um nun die einzelnen Versuche unter sich vergleichen zu können, schreiben wir

$$1 = \left(\frac{\alpha \varDelta}{\beta l}\right)^2 + \left(\frac{\alpha \varDelta}{\beta \lambda}\right)^2 ,$$

sodass jedesmal die Helligkeit in α als Einheit angesehen wird. Der Rechnung zufolge war

$(\alpha \varDelta : \beta l)^2 =$	0.5978	0.6286	0.5986	0.5717
$(\alpha \varDelta : \beta \lambda)^2 =$	0.4055	0.3786	0.3646	0.4119
Summe $=$	1.0033	1.0072	0.9632	0.9836 .

[125] Nimmt man aus diesen vier Zahlen das Mittel, so wird

$(\alpha \varDelta : \beta \lambda)^2 + (\alpha \varDelta : \beta l)^2 = 0.9898$
eigentlich hätte dies sein sollen $= 1.0000$
daher bleibt die Differenz . . $= 0.0102$.

264. Die Differenz ist am grössten beim dritten Versuch, nämlich $= 0.0368$. Sie gehört aber zu einer Distanz $\varDelta \alpha = 97'' \, 11'''$, welche also um $1'' \, 10'''$ zu vergrössern wäre, indem man den Spiegel $\varDelta$ um etwa 11 Linien von der Mauer oder der Kerze fortwärts hätte verschieben müssen. Man sieht also auch hieraus, dass das Auge noch sehr kleine Helligkeitsdifferenzen wahrzunehmen vermag. Denn das Maximum des Fehlers oder der Differenz überschreitet bei diesen vier Versuchen nicht den siebenundzwanzigsten Theil der ganzen Helligkeit, beim vierten Versuch beträgt er ein Sechzigstel, und beim ersten und zweiten ist er ganz verschwindend.

265. **Versuch 6.** Die Gerade BC stelle eine weisse und vollständig ebene Mauer dar von einer Breite $= 2'$ und einer Höhe $= 10'$. In L stehe eine Kerze, deren Strahlen senkrecht auf A auffallen. Dann weiss man nach dem Früheren, dass die höheren und tieferen Theile der Mauer schwächer beleuchtet sind, und zwar im directen Verhältniss des Sinus des Incidenzwinkels und umgekehrt wie das Quadrat der Entfernung (48, 53), sodass also die Beleuchtung in B ist $= \cos^3 BLA : AL^2$. Wenn daher der Winkel BLA nur wenige Grade beträgt, so nimmt die Helligkeit von A nach B hin nur wenig ab, so dass der Unterschied nicht *merkbar* wird. Es wurde nun in L eine Kerze aufgestellt, und in D ein Brett, durch welches das ganze Zimmer [**126**] hinter der Kerze verdunkelt wurde; sodann entfernte ich mich auf 10 bis 12 Fuss von der Mauer und betrachtete bald mit dem blossen Auge, bald durch eine Concavlinse die Mauer und suchte den Zwischenraum BC zu bestimmen, innerhalb dessen das Auge eine merkbare Differenz der Helligkeit nicht zu erkennen vermochte. Hierauf wurde die Entfernung LA der Kerze gemessen, ebenso die Höhe des Raumes CB, und die Hälfte davon wurde als Distanz AB bezeichnet. Es war

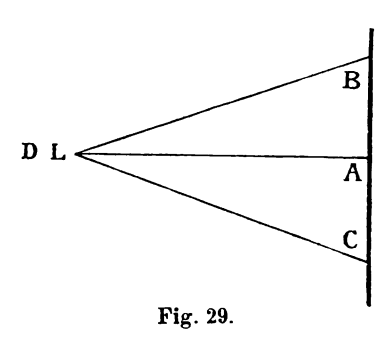


Fig. 29.

beim 1. Versuch	$AL =$	$10''$	$AB =$	$3''$	$3'''$
» 2. »		$20''$		6	9
» 3. »		$30''$		11	0
» 4. »		$40''$		15	9
» 5. »		$50''$		21	6

266. Wenn nun auch das Auge einen Unterschied zwischen den Helligkeiten in B und A nicht zu erkennen vermochte, so sind dieselben in Wirklichkeit dennoch von einander verschieden. Bezeichnet man nämlich die Helligkeit in A mit 1, so wird diejenige in $B = \cos^3 BLA$ sein, daher ist der Unterschied beider Helligkeiten $= 1 - \cos^3 BLA$; dies ist also die Differenz, welche sich bei diesem Versuch der Schärfe des Auges entzieht. Es ist aber

bei Versuch:	Winkel BLA =	$\cos^3 BLA$ =	also die Differenz =
1	9° 14′	0.9616	0.0384
2	9 35	0.9587	0.0413
3	10 23	0.9517	0.0483
4	11 8	0.9446	0.0554
5	12 8	0.9345	0.0655

267. Hieraus folgt, 1) dass diese Differenzen klein sind, wenn sie vielleicht auch alle wegen der Schwierigkeiten, mit denen die Vergleichung beider Helligkeiten verknüpft ist, grösser sind als bei anderen Versuchen. 2) Die Differenzen wachsen [**127**] mit zunehmender Distanz der Kerze; sie sind also nicht ein bestimmter Procentsatz der gesammten Helligkeit. Denn beim ersten Versuch ist die Differenz = 0.0384 oder = $\frac{1}{26}$ der Helligkeit in A, beim fünften dagegen, wo die Kerze fünfmal soweit entfernt war, betrug die Differenz = 0.0655 oder $\frac{1}{15}$ der Helligkeit in A.

268. Um andererseits diese Zahlen auf dieselbe Einheit zu beziehen, sind sie durch das Quadrat der Entfernung zu dividiren, und hierdurch wird

für die Distanz:	die Helligkeit in A:	die Helligkeit in B:	die Differenz:
10″	1.0000	0.9616	0.0384
20	0.2500	0.2397	0.0103
30	0.1111	0.1057	0.0054
40	0.0625	0.0590	0.0035
50	0.0400	0.0374	0.0026

Die Differenzen nehmen also mit den Helligkeiten ab, jedoch nicht in demselben Verhältnisse. Denn die Helligkeiten nehmen schneller ab, als die Differenzen. Es ist aber wohl zu bemerken, dass es sich hier um die wahre, nicht um die scheinbare Helligkeit handelt. Denn da die scheinbare Helligkeit von der Oeffnung der Pupille abhängig ist, so war sie bei den letzten Versuchen wegen der grösseren Oeffnung der Pupille grösser als bei den ersten. Nimmt man sie bei den einzelnen Versuchen den Differenzen, welche § 266 gefunden wurden, proportional, so ist die Helligkeit in A und B in diesem Maasse zu vergrössern, um die wahre Helligkeit in die scheinbare zu verwandeln. Denn von dieser ist das Urtheil des Auges abhängig. Daher war

[**128**]

bei Versuch	die scheinbare Helligkeit in A	die scheinbare Helligkeit in B	die Differenz
1	1.0000	0.9616	0.0384
2	0.2688	0.2578	0.0110
3	0.1398	0.1330	0.0068
4	0.0902	0.0852	0.0050
5	0.0682	0.0638	0.0044

269. Diese Differenzen sind die äussersten und wohl nie oder höchst selten überschrittenen Grenzen der Fehler, welche sich in das Urtheil des Auges einschleichen können. Denn bei diesen Versuchen nimmt die Helligkeit von A aus nach B oder C hin so allmählich ab, dass man sehr schwer bestimmen kann, wo die Differenz merkbar wird. Deshalb kann man gewiss annehmen, dass bei der Ausführung der beschriebenen Versuche die Höhe AB eher zu gross als zu klein bestimmt worden ist.

270. Aus der letzten Tabelle (268) ist ersichtlich, dass die Helligkeit schneller abnimmt als der Fehler, den man bei der Vergleichung der Helligkeiten begehen kann. Obzwar also der Fehler, an sich betrachtet, grösser ist bei einer grösseren scheinbaren Helligkeit, so macht er dennoch, wenn er auf die Helligkeit selbst bezogen wird, nur einen kleineren Theil derselben aus. So ist z. B. der Fehler beim ersten Versuche = 0.0384, d. h. neunmal so gross als beim fünften; aber der erstere beträgt $\frac{1}{26}$, der letztere erhebt sich bis auf $\frac{1}{15}$ der betreffenden Helligkeit. Und ohne Zweifel würde der Fehler, oder sein Verhältniss zur Helligkeit noch beträchtlicher ausfallen, wenn die Helligkeit noch geringer würde als diejenige, welche einer Distanz der Kerze von 50 Zoll entspricht. Man kann sich eine Helligkeit sogar so klein denken, dass das Auge sie mit [**129**] der vollständigen Dunkelheit verwechselt, wenn sich auch dasselbe, wie oben erwähnt, noch diesem Zustand allmählich anpasst.

. . . .

[**144**] 307. Die grössten Fehler der Versuche entspringen jedenfalls aus der Nachlässigkeit des Beobachters; es wird also gut sein, hier die Vorsichtsmaassregeln mitzutheilen, welche man anwenden muss, um dieselben so viel als möglich zu vermeiden. Ein Umstand, den man unter die wichtigsten Hindernisse rechnen muss, und der zugleich allen sinnlichen Wahrnehmungen gemein zu sein scheint, besteht in dem *Einfluss des Gemüths*

auf die Wahrnehmung. In Folge hiervon findet man oft, oder genauer gesprochen, glaubt man oft mehr zu finden, als da ist. Um diesem [**145**] Fehler aus dem Wege zu gehen, *darf man eine Messung von Strecken oder Winkeln nicht eher vornehmen, als bis man zuvor durch Versuche beide Helligkeiten als gleich gefunden hat. Man darf ferner diese Strecken oder Winkel nicht nachträglich ändern, wenn man etwa findet, dass sie einer vorgefassten Annahme nicht genügend entsprechen.* Man muss also an derjenigen Reihenfolge festhalten, welche bei den früher mitgetheilten Versuchen und Beispielen befolgt wurde.

308. Eine Vergleichung geht leichter von Statten, wenn beide Helligkeiten entweder gleich weiss, oder gleich gelb, gleich bläulich u. s. w. sind. *Die Richtigkeit der Entscheidung, dass zwei Helligkeiten gleich sind, ist aber dann am meisten zweifelhaft, wenn man bei der Vergleichung Schwierigkeiten gefunden hat und wenn man beide Helligkeiten länger anschauen musste, bevor man über ihre Gleichheit ein Urtheil abgeben zu können im Stande war.* Denn wenn beide Helligkeiten wirklich gleich waren, so springt dies so deutlich und so widerspruchslos ins Auge, dass ein Zweifel gar nicht aufkommen kann. So müssen bei den obigen Versuchen (256, 260) die von den Spiegeln beleuchteten Räume in der Weise gleich hell gesehen werden, als ob dieselbe Lichtquelle die Mauer durch zwei verschiedene Oeffnungen beleuchtete. Sobald man in Zweifel ist und das Auge sich beim ersten oder wiederholten Anblick weigert ein Urtheil abzugeben, kann man mit Sicherheit annehmen, dass ein Fehler vorliegt, und dann wird es am Platze sein, die Distanz der Spiegel zu ändern.

309. Besonders schwierig ist es dann, Helligkeiten mit einander zu vergleichen, wenn dieselben mehr oder weniger in der Farbe verschieden sind. So hat ein Blatt Papier, wenn es vom Mond beschienen wird, eine milchähnliche Farbe, unter dem Einfluss des Lichts einer Kerze sieht es gelb aus. Dieser Unannehmlichkeit kann man bisweilen abhelfen, wenn man das weisse Blatt durch ein anderes ersetzt, welches eine Farbe hat, die diese Ungleichheit aufhebt. *Oft muss man auch* [**146**] *absichtlich die eine von beiden Helligkeiten verstärken oder abschwächen, um deutlich zu sehen, dass sie dann grösser oder kleiner wird.* Denn auf diese Weise wird man zugleich erkennen, *worin die Differenz besteht, wenn sie von der verschiedenen Farbe beider Helligkeiten abhängig ist. Man*

kann dieselbe sodann allmählich so weit vermindern, dass sie für die Wahrnehmung verschwindet. Beispiele, welche hierher gehören, werden später vorkommen.

310. Da sich ferner das Auge an Helligkeiten, die sehr verschieden sind, nur allmählich gewöhnt, so darf man nicht sprungweise von einem Extrem zum anderen übergehen und muss abwarten, bis die Oeffnung der Pupille diejenige geworden ist, wie sie für die gegebene Helligkeit passt, und bis die zitternde Bewegung der Fibrillen, welche sich allmählich an jede Helligkeit anpasst, in einen *permanenten Zustand* übergegangen ist. Das Auge kann aber auch die dichteste Dunkelheit eher ertragen als eine zu grosse Helle, wie z. B. den Glanz der Sonne; daher wird unter fast gleichen Umständen das Urtheil des Auges weniger getrübt, wenn eine Helligkeit vorliegt, welche schwächer ist, als dieser Glanz.

311. Bevor man einen Versuch anstellt, sind die *Bedingungen* desselben genau zu erwägen. Deshalb *muss man alles fremde Licht so viel als möglich fernhalten; und wenn man dasselbe nicht vollständig fernhalten kann, so muss man dafür sorgen, dass beide zu vergleichende Helligkeiten durch dasselbe in gleichem Maasse verstärkt werden.* Denn auf diese Weise bleibt die Gleichheit fortbestehen. *Wenn man mehrere Kerzen anwendet, so muss man die Gleichheit ihrer Helligkeit, die sehr veränderlich ist, in Zweifel ziehen.* Deshalb wurde bei den früher mitgetheilten Versuchen die Anwendung von Spiegeln anstatt mehrerer Kerzen vorgezogen. Denn so veränderlich auch die Helligkeit der angewendeten Kerze sein mag, so sind doch alle Bilder derselben in dem nämlichen Maass heller oder dunkler geworden, sodass das *Verhältniss* zwischen den Leuchtkräften, worauf [147] es bei diesen Versuchen hauptsächlich ankommt, bestehen bleibt. Auch die verschiedene Reflexionsfähigkeit der Spiegel muss man vor Anstellung der Versuche besonders prüfen, um auch diese Bedingung zu erfüllen (256, 275). Aus demselben Grunde *ist es viel sicherer, die Entfernung oder den Incidenzwinkel einer einzigen Kerze zu ändern, als dass man eine andere Anzahl von Kerzen zuzieht.*

312. *Wenn, was mehrere der später vorkommenden Versuche erfordern, die Leuchtkraft der nämlichen Kerze auf der vorderen und hinteren Seite zu vergleichen ist, so glückt der Versuch besser, wenn die Kerzenflamme eine kegelförmige Gestalt hat.* Diese Bedingung muss man sehr

im Auge behalten, wenn man starke Vernachlässigungen vermeiden will.

313. *Es versteht sich endlich von selbst, dass die angewandten Spiegel oder Gläser mit aller Sorgfalt gereinigt werden müssen*, da selbst die kleinsten Stäubchen das Licht auffangen, und daher seine Dichtigkeit, die man intact halten sollte, verringern.

314. Es gibt noch mehrere Vorsichtsmaassregeln, die wir jedoch passender bei den Versuchen selbst einfügen werden, um sie zugleich an einem Beispiel zu beleuchten.

[148] Zweiter Theil.

Die Schwächung des Lichts durch durchsichtige Körper, besonders durch Glas,

experimentell und theoretisch betrachtet.

. . . .

. . . .

[232] **Kapitel III.**

Ueber die Brechung des Lichts durch krumme Flächen, besonders durch Linsen, und über die Lichtstärke des gebrochenen Lichts.

. . . .

[233] 487. Um auch hier vom Einfacheren zum Complicirteren fortzuschreiten, betrachten wir eine einzige Convexlinse, und indem wir zuerst von ihrer Reflexionsfähigkeit absehen, fragen wir *nach dem Verhältniss*, *in welchem das durch dieselbe gebrochene Licht verstärkt oder geschwächt ist*, *nach der Dichtigkeit*, *welche dasselbe im Brennpunkt der Linse besitzt*, *und nach dem Verhältniss derselben zur directen Beleuchtung.*

488. Ferner wollen wir, ähnlich wie die Linsen selbst oder deren Oeffnungen kreisförmig sind, auch annehmen, dass der leuchtende Gegenstand kreisförmig und eben sei, sodass die Axe der Linse das Centrum des Gegenstandes senkrecht durchschneide. Wenn dieser Fall entwickelt ist, so wird sich leicht ergeben, wie man zu verfahren hat, wenn sich dies anders verhält.

489. Sei also AB eine Linse, die wir als biconvex annehmen und deren Oberfläche aus zwei Kalotten zweier Kugeln gebildet werde, deren Radien DC und CE sind. FCG sei die Axe der Linse, das kreisförmige Object $g\,G\,\gamma$ sei senkrecht zu

ihr und G sei das Centrum desselben. Der Brennpunkt befinde sich in F; zieht man dann die Geraden gCf und $\gamma C\varphi$, so

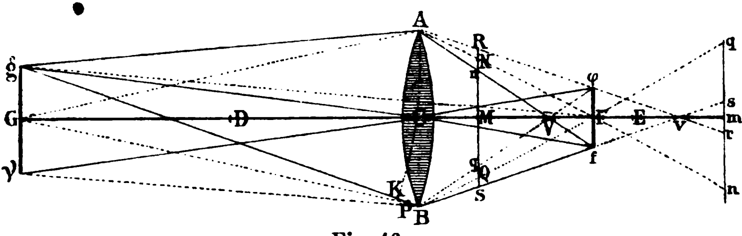


Fig. 46.

wird φFf das Bild des Gegenstandes sein. Es soll nun die Helligkeit desselben gesucht werden.

490. Nun ist an sich klar, dass es hier unendlich viele Strahlenkegel gibt, welche alle dieselbe gemeinsame Grundfläche haben, nämlich die Linse AB oder deren Oeffnung. Diese Kegel sind auf der vorderen Seite divergent, da die Strahlen von den einzelnen Punkten des Gegenstandes $gG\gamma$ aus sich über die ganze Oberfläche der Linse ausbreiten; auf der anderen Seite CF sind es convergente Strahlenkegel, da sich alle Strahlen, die von einem beliebigen Punkte g auf die ganze Linse sich verbreiten, nach der Brechung wieder in einem Punkte f vereinigen, um dort das Bild des Punktes g zu erzeugen. Da wir von der Reflexion und Zerstreuung durch das Glas absehen, [**234**] so folgt hieraus leicht, *dass die Menge der Strahlen in beiden Kegeln dieselbe ist.* Da dies für jeden leuchtenden Punkt gilt, so ergibt sich, *dass die Gesammtmenge aller Strahlen, die vom Gegenstand aus auf die Oberfläche oder die Oeffnung der Linse auffallen, in derselben Vollständigkeit in das Bild φFf eintritt.* Daher *findet man die mittlere Helligkeit des Bildes, wenn man diese Strahlenmenge durch den Flächeninhalt des Bildes dividirt.* In derselben Weise findet man auch die Helligkeit, welche einem beliebigen Punkte oder einem beliebigen Theil des Bildes entspricht.

491. Ferner ergibt sich aus dem Früheren die directe Beleuchtung, welche stattfindet, wenn dem Gegenstande ein Blatt Papier in φf zugewandt ist und folglich *ergibt sich hieraus auch eine Vergleichung zwischen der Beleuchtung des Bildes und derjenigen, welche der leuchtende Gegenstand ohne die Linse auf directem Wege erzeugt.* Sonach werden wir hierauf die Rechnung anwenden.

492. Sei also

die Entfernung des Gegenstandes . .	$GC = h$
die Entfernung des Brennpunktes . .	$CF = f$
der Halbmesser des Gegenstandes . .	$Gg = x$
der Halbmesser des Bildes	$F\varphi = \xi$
der Halbmesser der Linse	$CA = b$
der Halbmesser *DC*.	$DC = c$
der Halbmesser *CE*.	$CE = e$

Ferner sei die Menge der Strahlen, welche auf die Linse auffallen, $= q$, die mittlere Helligkeit des Bildes $= \eta$, die directe Beleuchtung $= \lambda$ und die absolute Beleuchtung $= \pi$ (100, 123).

493. Sieht man die Dicke der Linse als verschwindend an, so ist nach den Hauptsätzen der Dioptrik:

$$f = \frac{2ceh}{(c+e)h - 2ce}.$$

[**235**] Ferner wird nach denselben Sätzen

$$Gg : GC = Ff : CF$$
$$x : h \quad = \xi \quad : f,$$

also wird durch Substitution:

$$\xi = \frac{2cex}{(c+e)h - 2ce}.$$

Durch diese Gleichungen ergeben sich also die Beziehungen zwischen den Entfernungen und Halbmessern des Gegenstandes und des Bildes.

494. Um nun die Helligkeit des Bildes zu bestimmen, erinnere man sich, dass man nach dem Früheren (215) hatte

$$q = \tfrac{1}{2}\pi^2 \left[h^2 + b^2 + x^2 - \sqrt{(h^2 + b^2 + x^2)^2 - 4x^2b^2}\right].$$

Dies ist die Strahlenmenge, welche auf die Oberfläche oder die Oeffnung der Linse auffällt. Dividirt man dieselbe durch den Flächeninhalt des Bildes, welcher $= \pi\xi^2$ ist, so geht daraus die mittlere Helligkeit des Bildes hervor, nämlich

$$\eta = q : \pi\xi^2.$$

495. Wünscht man eine elegantere Formel, so ist, wenn man die Gerade gB zieht (217),

$$q = \tfrac{1}{4}\pi^2 (gB - gA)^2,$$

und daher

$$\eta = \pi \frac{(gB - gA)^2}{4F\varphi^2} .$$

Bezeichnet man also den schiefen Kegel BgA als einen *äusseren Kegel* (conus extremus) und seien gA und gB dessen *Seiten*, so wird $gB - gA$ *die Differenz der Seiten des äusseren Kegels*. Hält man diese Bezeichnungsweise fest und erinnert sich, dass π die absolute Beleuchtung ist, so entspringt hieraus der folgende

[**236**] 496. **Lehrsatz 23.** *Die absolute Beleuchtung verhält sich zur mittleren Beleuchtung eines Bildes, wie der Flächeninhalt des Bildes zum Flächeninhalt eines Kreises, dessen Durchmesser die Differenz der Seiten des äusseren Kegels gB und gA ist.*

Beweis: Da nämlich

$$\eta = \frac{\pi(gB - gA)^2}{4F\varphi^2} ,$$

so wird

$$\pi F\varphi^2 : \tfrac{1}{4}(gB - gA)^2\pi = \pi : \eta .$$

Es ist aber $\pi F\varphi^2$ der Flächeninhalt des Bildes, $\frac{1}{4}(gB - gA)^2\pi$ der Inhalt eines Kreises, dessen Durchmesser $= gB - gA$ ist; endlich ist π die absolute Beleuchtung. Hieraus folgt der Satz.

497. Man trage gA von g aus nach K hin ab und halbire KB in P, so wird

$$gP = \tfrac{1}{2}(gA + gB)$$

und daher (222)

$$q = \frac{\pi^2 Gg^2 AC^2}{gP^2}$$

und hieraus ferner

$$\eta = \frac{\pi\, Gg^2 AC^2}{gP^2 \cdot F\varphi^2} .$$

Es ergibt sich also die mittlere Beleuchtung η eines Bildes aus den Halbmessern des Objects, der Linse und des Bildes und aus dem arithmetischen Mittel zwischen den Seiten gB und gA des äusseren Kegels. Hieraus folgt:

498. **Lehrsatz 24.** *Die mittlere Beleuchtung eines Bildes verhält sich zur absoluten Beleuchtung, wie das Product aus dem Flächeninhalt des Objects und* [**237**] *dem Flächeninhalt*

der [illegible] zum Producte aus dem Inhalt des [illegible] und dem Inhalt eines [illegible], dessen Durchmesser $= gP$ oder gleich dem [illegible] zwischen den Seiten gA und gB des [illegible] Winkels ist.

Beweis. Da nämlich

$$[illegible] = \frac{[illegible]}{gF^2 \; Fc^2}$$

so wird

$$[illegible] = [illegible] .$$

Es sind aber [illegible] die im Lehrsatz erwähnten Flächeninhalte und π ist die [illegible] Bezeichnung. Hieraus erhellt der Satz.

[illegible]. Es ist ferner nach § [illegible]:

$$[illegible] = [illegible] \; Fc .$$

Setzt man dies ein, so wird

$$[illegible] = \frac{[illegible]}{[illegible] \; gF^2} .$$

Nun ist aber [illegible] $CF = \text{tg} \; AF$, und [illegible] gF sei der Cosinus eines Winkels, der mit u bezeichnet werden möge. Hierdurch wird

$$[illegible] = \pi \cos^2 u \; \text{tg}^2 AF [illegible] .$$

Hieraus folgt leicht der

[illegible] **Lehrsatz 25.** *[illegible] F des E[illegible] Quadrat der Tangente des [illegible] Durchmessers der Linse, wenn [illegible] F [illegible], zum Quadrat der Secante des[illegible] Durchmessers [illegible].*

Beweis. Da nämlich die [illegible] des Centrums die [illegible] ist, welches auch die Grösse des [illegible] sei, so nehmen wir [illegible] 238 [illegible] an, und dann fällt offenbar der äussere [illegible] $E\,g\,A$ mit dem [illegible] und geraden [illegible] $E\,g\,A$ zusammen; daher wird $gP = [illegible] A = [illegible] B$. Hieraus folgt

$$\cos u = [illegible] = \cos A \; [illegible]$$

mithin

$$= \pi \cos^2 A \; [illegible] \; \text{tg}^2 AF [illegible] .$$

oder

$$[illegible] = \text{tg}^2 AF \; [illegible] \sec^2 [illegible] .$$

Die Winkel AFC und AGC sind aber die scheinbaren Halbmesser der Linse, wenn sie von F und von G aus gesehen wird. Hieraus folgt der Satz.

501. **Lehrsatz 26.** *Ist der Gegenstand unendlich weit entfernt, so verhält sich die mittlere Helligkeit des Bildes zur absoluten Beleuchtung, wie das Quadrat der Tangente des scheinbaren Halbmessers der Linse, von F aus gesehen, zum Quadrat der Secante des scheinbaren Halbmessers des Objects, von C aus gesehen.*

Beweis: Denn wegen der unendlichen Entfernung des Objectes wird $gC = gP$, und hieraus folgt

$$\cos\omega = GC : gC = \cos gCG\ ,$$

mithin ist

$$\eta = \pi \cos^2 gCG \cdot \operatorname{tg}^2 AFC$$

oder

$$\eta : \pi = \operatorname{tg}^2 AFC : \sec^2 gCG\ .$$

Es ist aber gCG der scheinbare Halbmesser des Objectes, von C aus gesehen, und AFC der scheinbare Halbmesser der Linse, vom Brennpunkt F aus gesehen. Hieraus ergibt sich der Satz.

502. Sucht man nur die Helligkeit [**239**] im Centrum des Bildes, so wird $gCG = 0$ und $\sec gCG = 1$, daher ist

$$\eta : \pi = \operatorname{tg}^2 AFC : 1\ .$$

Die Helligkeit des Bildes ist im Centrum ein Maximum und die mittlere Helligkeit nimmt ab wie das Quadrat des Cosinus des scheinbaren Halbmessers des Objectes.

503. **Lehrsatz 27.** *Sind die Entfernungen des Gegenstandes und des Bildes von der Linse einander gleich, so verhält sich die centrale Beleuchtung des Bildes zur absoluten Beleuchtung, wie das Quadrat des Sinus des Halbmessers der Linse, von F aus gesehen, zur Einheit.*

Beweis: In diesem Fall ist nämlich

$$GC = FC\ ,$$

daher

$$AGC = AFC\ ,$$

mithin

$$\sec^2 AGC = \sec^2 AFC\ .$$

In demselben Fall ist aber auch (500)

$$\eta = \pi \operatorname{tg}^2 AFC \sec^2 AGC\ .$$

Hieraus wird durch Substitution:

$$\eta = \pi \operatorname{tg}^2 AFC \sec^2 AFC$$

oder

$$\eta = \pi \sin^2 AFC ,$$

also

$$\eta : \pi = \sin^2 AFC : 1 .$$

504. **Lehrsatz 28.** *Sind der Gegenstand und das Bild von der Linse gleichweit entfernt, so wird ein Blatt, welches das Bild im Centrum desselben, F, auffängt, eben so hell erleuchtet, als ob der Gegenstand nicht da sei* [**240**] *und die Linse mit derselben Intensität leuchte wie das Object.*

Beweis: Nach dem vorigen Satze ist nämlich für den ersten Fall

$$\eta = \pi \sin^2 AFC .$$

Dieselbe Formel erhält man aber auch für den zweiten Fall zufolge Lehrsatz 5 (109, 121), wenn man in diesem Falle die Linse selbst als leuchtenden Gegenstand ansieht. Hieraus ergibt sich also der Satz.

505. *Dasselbe gilt, wenn* $\omega = AFC$. Denn man hat gesehen (499), dass

$$\eta = \pi \operatorname{tg}^2 AFC \cos^2 \omega ,$$

daher wird durch Substitution:

$$\eta = \pi \sin^2 AFC .$$

η ist aber in diesen Fällen die mittlere Helligkeit des Bildes; sie ist also dieselbe, welche im Centrum F stattfinden würde, wenn die Linse mit derselben Intensität wie der Gegenstand leuchten würde, und wenn das Blatt φf von der Linse AB beleuchtet würde.

506. In den anderen Fällen gilt dieser Satz nicht, wenn er auch meistens der Wahrheit sehr nahe kommt. Es ist jedoch zu bemerken, dass bei allen diesen Entwickelungen die Reflexionsfähigkeit des Glases und die Menge der zerstreuten Lichtstrahlen gleich Null gesetzt wurde. Dies entspricht nicht genau der Wirklichkeit, da es solche Gläser nicht gibt. Daher wird die Helligkeit der einzelnen Theile des Bildes jedenfalls geringer sein. Nehmen wir also an, die Helligkeit des Bildes werde infolge der Reflexion und Zerstreuung der Strahlen verändert in einem Verhältniss $= 1 : \varkappa$, so wird (499)

$$\eta = \varkappa \pi \operatorname{tg}^2 AFC \cos^2 \omega .$$

[**241**] 507. Am häufigsten kommt derjenige Fall vor, dass die Entfernung des Gegenstandes unendlich ist. Dann ist also die Beleuchtung des Bildes im Centrum F:

$$\eta = \varkappa\pi \operatorname{tg}^2 AFC \cos^2 gCG \;,$$

oder

$$\eta = \varkappa\pi \frac{\sin^2 AFC \cos^2 gCG}{\cos^2 AFC} \;.$$

508. Der Winkel AFC hängt von der Oeffnung der Linse ab. Wenn nun diese derart war, dass man genau oder nahezu setzen durfte

$$\varkappa = \frac{\cos^2 AFC}{\cos^2 gCG} \;,$$

so wird auch

$$\eta = \pi \sin^2 AFC \;.$$

509. Es gibt aber sehr viele Fälle, wo diese günstigen Umstände entweder vollständig zutreffen, oder wo nur geringe Abweichungen stattfinden. Nimmt man z. B. eine Linse von guter Durchsichtigkeit, so ist $\varkappa$ ungefähr $= \frac{15}{16}$. Wenn sie nun stark genug gekrümmt ist, dass für entferntere Gegenstände der Winkel $AFC = 14^{\circ}$ ist, so wird auch $\varkappa = \cos^2 AFC$ oder wenigstens sehr nahe. Daher ist für die centrale Helligkeit

$$\eta = \pi \sin^2 AFC \;.$$

Werden also in diesen Fällen die Sonnenstrahlen durch eine Convexlinse gebrochen und im Brennpunkt durch ein weisses Blatt aufgefangen, so wird die Helligkeit des Bildes dieselbe sein, wie wenn die Linse durch ein Oberflächenstück der Sonne von gleicher Grösse ersetzt würde, durch welches das Blatt auf dieselbe Entfernung hin erleuchtet würde.

510. Hierdurch kann man sich ungefähr eine Vorstellung machen, wie riesengross die Helligkeit der Sonne ist, und welches *unter sonst gleichen Umständen* die Distanz ist, auf [**242**] welche sich irdische Körper entzünden würden. Denn die Wärmewirkung eines Stückes der Sonnenoberfläche, welches an der Stelle der Linse gedacht wird, ist mindestens ebensogross und vielleicht noch weit grösser als die Wärmewirkung der Strahlen dann ist, wenn sie mit Hilfe einer Linse im Brennpunkt derselben gesammelt werden. Derselbe Gegenstand wird also ohne Zweifel, wenn in dem einen, dann auch im andern Fall in Brand gerathen.

511. Die directe Beleuchtung λ bestimmt sich leicht nach Lehrsatz 5. Zieht man nämlich die Geraden gF und γF, so wird $gFG = GF\gamma$ der scheinbare Halbmesser des Gegenstandes $G\gamma$, von F aus gesehen, und hieraus wird (109, 121)

$$\lambda = \pi \sin^2 gFG .$$

512. **Lehrsatz 29.** *Ist der Gegenstand unendlich weit entfernt, so verhält sich die mittlere Helligkeit des Bildes zur directen Beleuchtung, wie das Quadrat der Tangente des scheinbaren Halbmessers der Linse, von F aus gesehen, zum Quadrat der Tangente des scheinbaren Halbmessers des Gegenstandes.*

Beweis: In diesem Fall ist nämlich (501)

$$\eta = \pi \operatorname{tg}^2 AFC \cdot \cos^2 gCG .$$

wegen $gFG = gCG$ wird aber auch

$$\lambda = \pi \sin^2 gCG ,$$

hieraus folgt

$$\eta : \lambda = \operatorname{tg}^2 AFC : \operatorname{tg}^2 gCG .$$

513. Auch bei diesem Lehrsatz wurde von der Reflexion und der Zerstreuung der Lichtstrahlen abgesehen. Berücksichtigt man jedoch dieselbe, so wird

$$\eta : \lambda = \varkappa \operatorname{tg}^2 AFC : \operatorname{tg}^2 gCG .$$

514. Auf diese Weise ergibt sich also das Verhältniss zwischen der directen Beleuchtung und [243] der Helligkeit im Brennpunkt der Linse, vorausgesetzt dass das Verhältniss $1 : \varkappa$ gegeben ist, welches die Undurchsichtigkeit und Zerstreuungsfähigkeit der Linse ausdrückt. Man hat aber gesehen, dass man zumeist setzen darf

$$\varkappa \operatorname{tg}^2 AFC = \sin^2 AFC ,$$

und da der Winkel AFC selten $> 20^\circ$ ist, so wird man für Gegenstände, deren Halbmesser kleiner als 10 bis 15 Grad ist, sehr angenähert schreiben dürfen:

$$\eta : \lambda = AFC^2 : gFG^2 .$$

Setzt man z. B. den Winkel $AFC = 15^\circ$ und den scheinbaren Halbmesser der Sonne $= \frac{1}{4}^\circ$, so wird

$$\eta : \lambda = 15^2 : (\tfrac{1}{4})^2 = 60^2 : 1 = 3600 : 1 .$$

In diesem Fall wird also die Helligkeit des Sonnenbildes im

Brennpunkt der Linse 3600 mal so gross als die Helligkeit eines Blattes, welches direct von der Sonne beleuchtet wird.

515. Da ferner ist (513)

$$\eta : \lambda = \varkappa \operatorname{tg}^2 AFC : \operatorname{tg}^2 gCG\,,$$

so wird

$$\varkappa = \frac{\eta \operatorname{tg}^2 gCG}{\lambda \operatorname{tg}^2 AFC}\,.$$

Wenn man daher einen Versuch so einrichten kann, dass $\eta = \lambda$ wird, so ergibt sich $\varkappa$ durch die Winkel gCG und AFC und in diesem Fall wird

$$\varkappa = \frac{\operatorname{tg}^2 gCG}{\operatorname{tg}^2 AFC}\,.$$

Es ist aber

$$\operatorname{tg} gCG = \varphi F : FC$$
$$\operatorname{tg} AFC = AC : FC\,,$$

woraus

$$1 : \varkappa = AC^2 : \varphi F^2\,.$$

Hat man also die Oeffnung einer Linse in der Weise verkleinert, dass die Helligkeit des Bildes derjenigen Helligkeit, welche die directe Beleuchtung erzeugt, gleich wird, [**244**] *so verhält sich die Lichtmenge, welche auf die Oeffnung der Linse auffällt, zu derjenigen, welche gebrochen wird, d. h. durch die Linse hindurchgeht, wie der Flächeninhalt der Oeffnung der Linse zum Flächeninhalt des Bildes.*

516. Hieraus folgt also, dass man durch einen einzigen Versuch die Lichtmenge bestimmen kann, welche von der Linse reflectirt und zerstreut wird; dieser Betrag ist $= 1 - \varkappa$. Da aber das Verhältniss $1 : \varkappa$ nur wenig von der Gleichheit verschieden ist, so werden sich offenbar die Flächeninhalte einerseits der Oeffnung der Linse, andererseits des Bildes nur wenig von einander unterscheiden. Daher empfiehlt es sich, den Versuch so anzuordnen, dass beide Flächenstücke eine Grösse erhalten, welche eine bequeme Messung gestattet. Denn kleinere Flächenstücke, wie z. B. das Bild der Sonne, einer Kerze, des Mondes im Brennpunkt einer stark convexen Linse, lassen sich weniger leicht und weniger genau durch Messung bestimmen. Da überdies eine Kerzenflamme hinsichtlich ihrer Grösse sehr veränderlich ist, so ist sie für diesen Zweck nicht brauchbar, weil die directe Beleuchtung von dieser Grösse abhängt, während die Helligkeit des Bildes nur wenig dadurch beeinflusst wird.

Ich habe deshalb geglaubt, die Sache folgendermaassen anfassen zu müssen.

517. **Versuch 19.** Ein Zimmer wurde gut verdunkelt und nur ein Fenster offen gelassen, durch welches das Licht eintreten konnte. Der Himmel war überall mit ziemlich gleichmässig hellen Wolken bedeckt. An der Wand, welche sich dem Fenster gegenüber befand, wurde ein weisses Blatt befestigt, und durch eine davor aufgestellte Sammellinse wurde ein Bild des Himmels, so weit er durch das Fenster sichtbar war, erzeugt und auf dem Blatte aufgefangen. Nun fiel dasselbe Licht auf directem Wege auf die übrigen Theile des Blattes auf, und so konnte ich sehen, dass ich einen grossen Theil der Linse mit einem ebenen Schirme [**245**] bedecken musste, wenn die Helligkeit des Bildes der directen Beleuchtung gleich werden sollte.

Der Kreis AB stelle die Oberfläche der Linse dar, und der Theil FBG derselben sei durch einen ebenen Schirm FGE bedeckt. Die Fläche AFG wurde in einen gleichgrossen Kreis HI verwandelt, um bei Erneuerung des Versuchs eine kreisförmige Oeffnung herstellen zu können, welche mit der Linse concentrisch wäre. Man konnte dann also versuchen, ob dies die Oeffnung war, bei welcher die Helligkeit des Bildes der directen Beleuchtung gleich wird. Hierauf wurden die nachstehenden Entfernungen und Strecken gemessen, und zwar in Rheinischen Fussen und deren Decimaltheilen: Fig. 46:

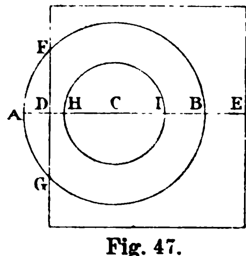


Fig. 47.

die Distanz	$GF =$	19.833
» »	$CF =$	0.521
also	$GC =$	19.312
ferner	$AB =$	0.191
die Höhe des Fensters. . . .	$=$	2.403
dessen Breite	$=$	1.722
also der Inhalt	$=$	4.138
das entspricht einem Kreis, dessen Durchmesser	$g\gamma =$	2.295
ebenso war der Durchmesser des Bildes	$\varphi f =$	0.065
	$DC = CE =$	0.502
der Halbmesser der Oeffnung der Linse	$=$	0.071

518. Da nun die Gleichung gilt (515)

$$1 : \varkappa = AC^2 : \varphi F^2 = AB^2 : \varphi f^2 ,$$

so wird in unserem Versuche

$$1 : \varkappa = 0.071^2 : 0.065^2 = 71^2 : 65^2 ,$$

und daher sehr nahe

$$1 : \varkappa = 37 : 31 = 6 : 5 .$$

[**246**] Bei dieser Linse wurde also ungefähr der sechste Theil des Lichts reflectirt und zerstreut; sie war also ziemlich unrein und weniger glatt.

519. Wegen

$$\operatorname{tg} gFG = \frac{gG}{FG} = \frac{1.1475}{19.8330} = 0.0578581$$

ist der scheinbare Halbmesser, nämlich der Winkel

$$gFG = 3^{\circ}\, 18'\tfrac{2}{3} ,$$

woraus

$$\sin^2 gFG = 0.003336 ,$$

es wird also die directe Beleuchtung (511)

$$\lambda = 0{,}003336\,\pi .$$

520. Aehnlich wird

$$\operatorname{tg} AFC = \frac{955}{5210} = 0.1833013 ,$$

woraus

$$AFC = 10^{\circ}\, 23'\tfrac{1}{3} ,$$

und in ähnlicher Weise

$$GCg = 3^{\circ}\, 24' .$$

Wegen

$$\eta = \pi \operatorname{tg}^2 AFC \cos^2 GCg$$

wird also durch Ausführung der Rechnung

$$\eta = 0.03356\,\pi .$$

Dies ist die Helligkeit des Bildes, wenn das Licht durch die ganze Linse gebrochen wird. Dieselbe ist jedoch zu vermindern in dem Verhältniss, in welchem der Inhalt der ganzen Linse zu dem der übrigbleibenden Oeffnung steht. Dieses Verhältniss wurde zu 60 : 7 gefunden, und deshalb ist

$$\eta = 0.003915\,\pi ,$$

während eigentlich sein sollte

$$\eta = 0.003336\,\pi$$
$$\text{Differenz} = 0.000579\,\pi\ .$$

[247] Dies ist ungefähr ein Sechstel des directen Lichts, oder ein Siebentel derjenigen Lichtmenge, welche auf die Linse auffällt und an der Oberfläche derselben oder infolge der Heterogeneität der Theilchen reflectirt und zerstreut wird.

. . . .

523. Diese Bestimmung des Lichtverlustes in Sammellinsen ist von höchster Bedeutung deshalb, weil wir später sehr vielen wichtigen Versuchen begegnen werden, die man ohne Hilfe jener Bestimmung nicht anstellen kann. Man muss deshalb den eben beschriebenen Versuch mehrmals sorgfältig wiederholen, um aus allen das Mittel zu nehmen und so der Wahrheit so nahe als möglich kommen zu können. Da nun im Folgenden vorzugsweise die centrale Helligkeit in Betracht kommt, so wollen wir zunächst das Verhältniss bestimmen, in welchem für die ausserhalb des Centrums F liegenden Punkte die Helligkeit abnimmt. Hierdurch [248] wird sich ergeben, wie gross der Winkel φCF werden darf, ohne dass das Auge in dem Raume φf eine Verschiedenheit der Helligkeit zu bemerken vermag. Denn man sieht leicht im Voraus, dass die Helligkeit vom Centrum F aus gegen φ und f hin nur wenig abnimmt, wenn nicht der Winkel AFC sehr beträchtlich ist.

524. In g befinde sich also ein unendlich kleines Element $= 1$, die Strahlenmenge, welche von diesem Element aus auf die Oberfläche der Linse oder deren Oeffnung und daher auch in das entsprechende Element f des Bildes gelangt, heisse Q. Hierbei sehen wir zunächst von der Reflexion und Zerstreuung der Strahlen ab, um erst später darauf Rücksicht zu nehmen. Man erinnere sich nun, dass man dieselbe Menge Q erhält, sowohl wenn man sich das Element g, wie auch, wenn man sich die Oberfläche oder die Oeffnung der Linse als leuchtend denkt (196, 197). Also wird (207)

$$Q = \tfrac{1}{2}\pi\left(1 - \frac{h^2 + x^2 - b^2}{\sqrt{(h^2 + x^2 - b^2)^2 + 4b^2h^2}}\right).$$

Diese Gleichung verwandelt sich leicht in die folgende

$$Q = \tfrac{1}{2}\pi\left(1 - \frac{(h^2 + x^2 + b^2) - 2b^2}{\sqrt{(h^2 + x^2 + b^2)^2 - 4b^2x^2}}\right).$$

Es ist aber

$$gA^2 = h^2 + x^2 - 2bx + b^2$$
$$gB^2 = h^2 + x^2 + 2bx + b^2 .$$

Hieraus wird

$$h^2 + b^2 + x^2 = \tfrac{1}{2}(gB^2 + gA^2)$$
$$2bx \quad = \tfrac{1}{2}(gB^2 - gA^2) .$$

[**249**] Setzt man diese Werthe ein, so wird nach gehöriger Reduction

$$Q = \tfrac{1}{2}\pi\left(1 - \frac{gB^2 + gA^2 - 4b^2}{2gB \cdot gA}\right).$$

Da aber

$$\frac{gB^2 + gA^2 - 4b^2}{2gBgA} = \cos BgA ,$$

so wird

$$Q = \tfrac{1}{2}\pi(1 - \cos BgA) = \pi \sin^2 \tfrac{1}{2} BgA .$$

525. Nun findet sich aber der Inhalt des dem Element g entsprechenden Bildes durch das Verhältniss

$$\frac{CF^2}{CG^2} = \frac{Ff^2}{Gg^2} .$$

Daher ist seine Helligkeit

$$\eta = \pi \frac{CG^2}{CF^2} \sin^2 \tfrac{1}{2} BgA .$$

Wenn nun die Linse AB von g aus gesehen wird, so wird $\frac{1}{2}BgA$ der kleinere scheinbare Halbmesser derselben sein; die Beleuchtung η verhält sich also wie das Quadrat desselben. Dieser Lehrsatz ist also sehr ähnlich dem Lehrsatz 5 (109).

526. Der Winkel gCG ist nur in seltenen Fällen $> 20^\circ$. Für Punkte, welche näher beim Centrum liegen, kann man daher die Grösse $x : h$ als so klein ansehen, dass ihre höheren Potenzen vernachlässigt werden dürfen. Da ferner $b : h$ meistens eine sehr kleine Grösse ist, so kann man die Formel

$$Q = \tfrac{1}{2}\pi\left[1 - \frac{(h^2 + x^2 + b^2) - 2b^2}{\sqrt{(h^2 + x^2 + b^2)^2 - 4b^2x^2}}\right]$$

[**250**] in die folgende zusammenziehen:

$$Q = \tfrac{1}{2}\pi\left(1 - \frac{(h^2 + x^2 + b^2) - 2b^2}{\sqrt{(h^2 + x^2 + b^2)^2}}\right).$$

Hieraus wird

$$Q = \pi \frac{b^2}{h^2 + b^2 + x^2} = \pi \frac{b^2}{h^2 + b^2} - \pi \frac{b^2 x^2}{(h^2 + b^2)^2} + \cdots$$

und mithin

$$\eta = \pi \frac{AC^2 \cdot CG^2}{CF^2 \cdot GA^2} - \pi \frac{AC^2 \cdot Gg^2 \cdot CG^2}{CF^2 \cdot GA^4} + \cdots$$

Bezeichnet man also die centrale Helligkeit des Bildes mit c, so wird

$$\eta = c\left(1 - \frac{Gg^2}{GA^2} + \cdots\right).$$

Daher verhält sich die Abnahme der Helligkeit sehr nahe wie das Quadrat der Tangente des Winkels gCG.

527. Nimmt man an, dass das Auge solche Helligkeiten noch als gleich empfindet, welche sich von einander um ein Zwanzigstel ihres Betrages unterscheiden, so wird

$$\mathrm{tg}^2 gCG = \tfrac{1}{20} = 0.05\ ,$$

woraus

$$\mathrm{tg}\, gCG = 0.2236\ .$$

Daher wird der Winkel gCG ungefähr $= 12\frac{1}{2}^{\circ}$.

So gross darf also der scheinbare Halbmesser des Objectes werden, bevor das Auge im Stande ist, an dem Bilde eine Differenz zwischen der Helligkeit der äussersten Punkte φ, f und derjenigen des Centrums F wahrzunehmen. Also darf man gerade in denjenigen Fällen, wo es erlaubt ist, die ausführlichere Rechnung abzukürzen, auch die centrale Helligkeit als die allen Punkten gemeinsame betrachten. Auf diese Weise hat man (500)

$$\eta = \pi\, \mathrm{tg}^2 AFC : \sec^2 AGC\ ,$$

und für unendlich entfernte Objecte

$$\eta = \pi\, \mathrm{tg}^2 AFC\ .$$

[**251**] 528. Man darf einen Gegenstand dann als unendlich entfernt ansehen, wenn der Halbmesser der Linse AC gegenüber der Entfernung GC, oder wenn der Winkel AGC verschwindend klein ist. Nun wird aber das Auge die Helligkeiten so lange als gleich empfinden, bis $\sec^2 AGC = 21 : 20$ ist, oder bis der Winkel $AGC = 12^{\circ}$ wird. Daher darf man eine Abkürzung dann gewiss zulassen, wenn der Winkel AGC nur 2 bis 3 Grad beträgt.

529. Man kann hier nebenbei bemerken, dass sich das Gesagte auch auf das Auge anwenden lässt, da die Helligkeit des Bildes auf der Netzhaut in genau derselben Weise bestimmt wird und dieselben Strahlenkegel auftreten. Ferner ist die Oeffnung der Pupille so klein, dass man die Gegenstände selbst dann noch als unendlich entfernt ansehen darf, wenn sie dem Auge so nahe sind, dass sie sich innerhalb der deutlichen Sehweite befinden. Hieraus erkennt man den Grund, warum die scheinbare Helligkeit der Gegenstände unabhängig ist von der Entfernung derselben, abgesehen von der Verminderung durch andere Ursachen, wie z. B. die Zerstreuung der Strahlen in der Luft. Hierdurch ist also der Unterschied zwischen scheinbarer Helligkeit und directer Beleuchtung klargestellt, welcher schon früher (37, 73, 79) als sehr beträchtlich bezeichnet wurde. Weiteres hierüber später.

530. Wir kommen jetzt auf die früher (64, 74, 84) in Aussicht gestellte Absicht zurück, zu zeigen, wie die Grundsätze der Photometrie unter einander zusammenhängen und durch Versuche gestützt werden. Man hat gesehen und es wurde durch Versuch 19 (517) bewiesen, dass die Helligkeit eines Bildes abhängig ist von der Helle des Objectes und von den Winkeln AGC und AFC, und dass dieselbe einfach auf den Winkel AFC reducirt werden kann, sobald der Gegenstand genügend weit entfernt [**252**] und sein scheinbarer Halbmesser hinlänglich klein ist. Ferner steht fest, dass man jene Helligkeit zu ändern im Stande ist, dadurch dass man nur die Oeffnung der Linse ändert. Man hat also ein Mittel, beliebig viele Bilder in der Weise zu verändern, dass ihre Helligkeiten gleich werden, und dann kann man aus dem Winkel AFC einen Schluss ziehen auf das Verhältniss der Helligkeiten der Gegenstände selbst. Auf diese Weise ist es also möglich, dieselben mit einander zu vergleichen. Hiermit hat man den

531. **Versuch 20.** In L befinde sich eine Kerze, in CD und AB stelle man zwei weisse Ebenen oder Blätter so auf,

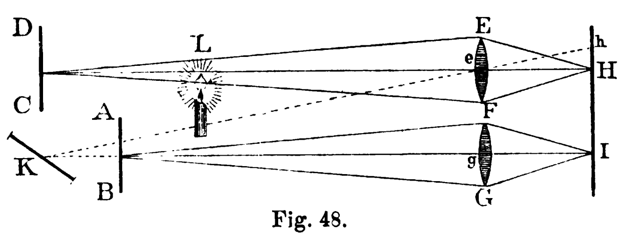


Fig. 48.

dass das Licht der Kerze senkrecht auf beide auffällt. Dann folgt aus dem Versuch 6, dass die einzelnen Theile derselben dann merklich gleich erleuchtet scheinen, wenn die Winkel DLC und ALB kleiner als 20 Grad sind; und dies kann man leicht erreichen, da die Grösse der Blätter willkürlich ist. Ferner mögen in EF und FG zwei gleiche Convexlinsen stehen und in H und I die Bilder der Blätter AB und CD aufgefangen werden. Da nun das Bild I, welches dem Blatt AB, das der Kerze näher ist, entspricht, heller ist, so folgt, dass man die Linse FG abblenden, d. h. ihre Oeffnung so lange verkleinern muss, bis beide Bilder gleich hell gesehen werden. Dann wird der Halbmesser der Oeffnung einer Linse in demselben Verhältniss stehen, wie die Entfernung des entsprechenden Blattes von der Kerze, oder der Flächeninhalt der Oeffnung wird sich verhalten wie das Quadrat dieser Entfernung.

532. Durch Ausführung des Versuches fand ich, dass dieser Satz thatsächlich besteht. Die Entfernung des Blattes AB nahm ich zu 10 Pariser Zoll, [**253**] die des Blattes DC zu $14\frac{1}{7}$ Zoll. Alsdann fand ich, dass die Oeffnung der Linse FG gleich der Hälfte derjenigen der Linse EF sein musste. Die Entfernung beider Linsen von der weissen Ebene betrug 7 Zoll, die Entfernung der Kerze H ungefähr 5 Fuss, der Halbmesser der Oeffnung EF war $= 16\frac{3}{4}'''$, derjenige der Oeffnung FG $= 11\frac{3}{4}'''$.

533. **Princip des Versuchs.** Bezeichnet man die Helligkeit des Blattes AB mit C, diejenige von DC mit c, so ist offenbar

$$\text{die Helligkeit des Bildes } I = C \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} FIG$$
$$\text{des Bildes } H = c \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} EHF\,.$$

Nun sind aber die beiden letzteren Helligkeiten einander gleich, und da auch die Entfernung beider Linsen von der Ebene HI dieselbe ist, so wird

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} FIG = \tfrac{1}{2} FG : gI$$
$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} EHF = \tfrac{1}{2} FE : eH = \tfrac{1}{2} FE : gI\,,$$

also

$$C \cdot FG^2 = c \cdot FE^2$$

oder

$$C : c = FE^2 : FG^2\,.$$

Es ist aber (48)

$$C : c = LC^2 : LA^2$$

und daher

$$FE : FG = LC : LA\,.$$

Da dies dem Versuch zufolge wirklich stattfindet, so folgt, dass die Grundsätze der Photometrie, auf welche der Calcül aufgebaut wurde, richtig sind.

534. **Versuch 21.** Das Blatt, welches beim vorigen Versuche das nähere war, stellte ich in K auf, sodass beide von der Kerze gleich weit entfernt waren, während jedoch das Licht der Kerze auf das Blatt K unter einem schiefen Winkel $= 30^\circ$ auffiel. [**254**] Hierauf musste man die Oeffnung der Linse EF verkleinern, um beide Bilder gleich hell zu machen. Die Oeffnung der Linse FG fand sich nun doppelt so gross als die der Linse EF. Aber aus den Grundsätzen der Photometrie folgt: *dass bei gleicher Entfernung beider Blätter von der Kerze im Allgemeinen der Flächeninhalt der Oeffnung im umgekehrten Verhältniss stehen muss wie der Sinus des Incidenzwinkels, vorausgesetzt dass* $eH = gI$ *ist.*

Beweis: Bezeichnet man die Helligkeit des Blattes DC mit c, des Blattes K mit k, den Sinus des Incidenzwinkels am Blatte K mit s, so wird, weil das Licht auf das Blatt DC unter einem rechten Winkel auffällt (53),

$$c : k = 1 : s\,.$$

Aber wegen $DH = KI$ und $eH = gI$ wird auch die Helligkeit

$$H : I = EF^2 c : FG^2 k = EF^2 : FG^2 s\,.$$

Es ist aber $H = I$, also

$$EF^2 = s \cdot FG^2$$

oder

$$1 : s = FG^2 : EF^2,$$

wie zu beweisen war.

535. In diesen beiden Versuchen wurden die Entfernungen DH, BI, KI so gross genommen, dass sie gegenüber dem Durchmesser der Oeffnung der Linsen als unendlich angesehen werden konnten, wodurch sich die Entwickelungen eleganter gestalten liessen (527, 528). Aus demselben Grunde wurden ferner zwei gleiche Linsen gewählt, um $eH = gI$ setzen zu können. Im anderen Falle würde das, was über die Durchmesser der Oeffnungen gesagt wurde, für die Tangenten der Winkel EHe und FIg Geltung haben.

[**255**] 536. **Versuch 22.** Die Linse FG wurde entfernt und beide Blätter D und K so aufgestellt, dass sie von der Kerze

L gleichweit entfernt waren und die Strahlen auf beide senkrecht auffielen, während zugleich das eine Blatt *K* gegen die Ebene *HI* schief geneigt war. Die Strahlen traten also unter einem Winkel aus, welcher kleiner war, als ein Rechter. Es fand sich dann, dass die Bilder beider Blätter *H* und *h* dennoch gleich hell waren.

537. Hieraus folgt also, dass die Schiefe der Ausstrahlung keinen Einfluss auf die Helligkeit des Bildes hat, dass also die Dichtigkeit der Strahlen dieselbe ist, gleichviel ob sie mehr oder weniger schief austreten. Da dies auch für das Bild des Gegenstandes auf der Netzhaut des Auges gilt (529), so folgt hieraus die Uebereinstimmung des vorliegenden Versuches mit denjenigen, welche im Früheren (74 bis 84) besprochen wurden, und ferner ergibt sich, was früher (87) bewiesen wurde, dass man eine leuchtende Fläche von schiefer Stellung ersetzen kann durch eine andere, welche dem Gegenstand senkrecht gegenübersteht. Man bemerke ferner, dass bei diesen Versuchen die grössere oder geringere Durchsichtigkeit der Linse gleichgiltig ist, falls nur bei den zwei ersteren Versuchen (531, 534) die beiden Linsen, welche angewendet werden, gleich hell sind; man kann dies feststellen, wenn man das Bild des nämlichen Blattes *DC* im Brennpunkt beider Linsen auf einem weissen Blatt auffängt. Denn beide müssen gleich hell gesehen werden, so lange die Winkel *EHe* und *FIg* gleich sind. Da diese aber von der Oeffnung der Linse abhängen, so kann man sie leicht zur Gleichheit bringen.

538. Werden die Strahlen nach ihrer Brechung durch die Linse ausserhalb des Brennpunktes auf einer weissen Fläche aufgefangen, z. B. in *RS*, [256] so ergibt sich aus dem Früheren

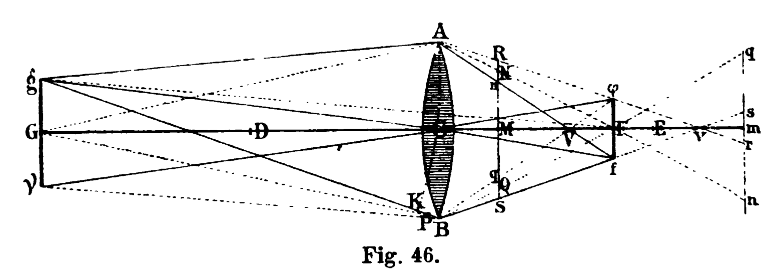


Fig. 46.

ohne Schwierigkeit die Helligkeit dieser Fläche. Dieselbe ist jedenfalls kleiner als die Helligkeit des Bildes *φf* und in hohem

Maasse abhängig von der scheinbaren Grösse des leuchtenden Gegenstandes. Man kann diese Sache in folgender Weise behandeln.

539. Wie man früher schon gesehen hat, entstehen hinter der Linse unendlich viele Strahlenkegel, welche die Oeffnung der Linse als gemeinsame Basis haben, während ihre Spitzen auf einer krummen Fläche liegen, an deren Stelle man eine mit dem Radius CF beschriebene Kugeloberfläche gesetzt denken kann. So lange jedoch der Winkel φCF nur wenige Grad beträgt, wird man statt der Fläche ohne merklichen Fehler die Ebene φf substituiren dürfen. Der mittlere AFB unter diesen Kegeln steht senkrecht auf der Basis, während alle übrigen mehr oder weniger dagegen geneigt sind. Die äussersten Kegel seien $A\varphi B$ und AfB. Alle Kegel durchschneiden ferner die Ebene RS, und der mittlere AFB schneidet hier einen Kreis aus, dessen Durchmesser NQ ist und dessen Centrum auf der Axe der Linse in M liegt. In ähnlicher Weise schneiden auch die übrigen Kegel Kreise aus, welche die gleiche Grösse haben, wie der mittlere Kreis, jedoch excentrisch gelegen sind. Mithin gibt es in der Ebene SR einen kreisförmigen Raum vom Durchmesser nq, welcher allen diesen Kreisen gemeinsam ist. In diesem Raum findet das Maximum der Helligkeit statt, weil hier die Strahlen von allen Kegeln auftreffen. Dagegen wird die Helligkeit in der Richtung von n nach R und von q nach S hin abnehmen und in den äussersten Punkten R und S vollständig verschwinden.

540. Obzwar also das Licht in der Ebene RS ungleichmässig vertheilt ist, so wird doch der mittlere Theil nq in der Weise gleichmässig beleuchtet, als ob alle Kegel mit dem mittleren Kegel AFB zusammenfielen. Mithin ergibt sich die Helligkeit dieses Stückes nq, wenn man die Menge aller Strahlen, welche die Linse durchdringen [**257**] und sich in der Bildebene φf vereinigen, durch den Inhalt eines Kreises dividirt, dessen Durchmesser $= NQ$ ist.

541. Nun hat man früher (497) gesehen, dass

$$q = \frac{\pi^2 G g^2 AC^2}{g P^2},$$

bezeichnet man also die Helligkeit in qn mit η', so wird, da der Inhalt des Kreises $NQ = \pi NM^2$ ist,

$$\eta' = \frac{\pi Gg^2 \cdot AC^2}{gP^2 \cdot NM^2}.$$

542. Diese Helligkeit ist noch zu vermindern nach Maassgabe der Lichtschwächung, welche infolge der Reflexion und der Brechung durch die Linse entsteht. Uebrigens muss man wohl beachten, dass bei zunehmender Distanz CM der Halbmesser nq abnimmt, bis er schliesslich in V ganz verschwindet, nämlich in dem Punkte, wo die Seiten Af und $B\varphi$ der äussersten Kegel die Axe schneiden. Daher kann die gefundene Formel nur bis zu der Distanz CV ausgedehnt werden.

543. Diese Distanz ist um so grösser, je grösser die Oeffnung der Linse und je kleiner der Durchmesser des Bildes ist. Stellt also φf das Bild der Sonne oder des Mondes dar, und beträgt der Winkel AFC 10 Grad oder mehr, so liegt der Punkt V dem Centrum F so nahe, dass die Distanz VF nahezu verschwindend ist.

544. In ähnlicher Weise gibt es hinter dem Bildpunkt F einen Punkt v, welcher dem Punkt V analog ist. Verschiebt man dann die Ebene RS bis nach qn, so hat man auch in sr ein kreisförmiges Flächenstück, welches durch alle Strahlenkegel beleuchtet wird. Die Helligkeit desselben findet sich auf dieselbe Weise =

$$\eta'' = \frac{\pi \cdot Gg^2 \cdot AC^2}{gP^2 \cdot mn^2}.$$

[258] 545. Vergleicht man diese beiden Helligkeiten mit der Helligkeit des Bildes im Brennpunkt, nämlich mit (497)

$$\eta = \frac{\pi \cdot Gg^2 \cdot AC^2}{gP^2 \cdot \varphi F^2},$$

so findet man

$$\eta \cdot \varphi F^2 = \eta' \cdot MN^2 = \eta'' \cdot mn^2,$$

. . . .

[263] **Kapitel IV.**

Ueber die Brechung des Lichts durch mehrere Linsen und über die mehrfache Reflexion und Brechung durch eine und dieselbe Linse.

. . . .

[280] 596. Man habe zwei Linsen ef und EF, ihre gemeinsame Axe sei $AdDC$, der Gegenstand sei Aa, das erste Bild Bb, das zweite Cc. Das letztere werde auf einer weissen

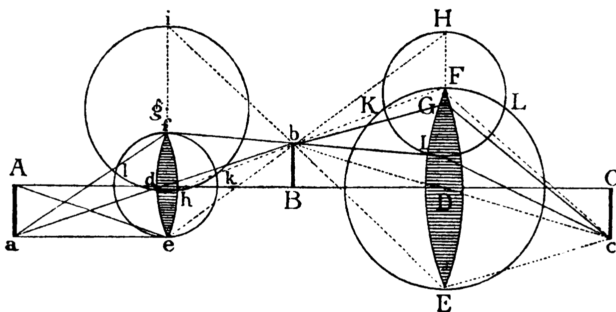


Fig. 55.

Ebene aufgefangen und es sei seine Helligkeit zu berechnen. Hierzu zunächst einige Vorbemerkungen.

597. Man sehe zunächst ab von demjenigen Licht, welches von beiden Linsen reflectirt und zerstreut wird, da man nach Ausführung der Rechnung leicht darauf Rücksicht nehmen kann.

598. Ferner sieht man leicht, dass sich die Helligkeit des Bildes Cc aus dem Früheren ergibt, sobald man annehmen darf, dass alles Licht, welches in das erste Bild Bb eintritt, auch in das zweite Cc gelange, was wenigstens in den meisten Fällen stattfindet. *Bestimmt man nämlich die Menge der Strahlen, welche auf die Objectivlinse fe auffallen, so wird diese Menge, falls sie vollständig nach Cc gelangt, durch den Flächeninhalt des Bildes Cc zu dividiren sein.* Oder, was genau dasselbe ist: *Man berechne die Helligkeit des Bildes Bb, dann verhält sich diese zur Helligkeit des Bildes Cc, wie der Inhalt von Cc zum Inhalt von Bb.* Die Rechnung selbst stützt sich hinsichtlich der Grösse der Bilder auf die Principien der Dioptrik, hinsichtlich der Strahlenmenge oder der Helligkeit

des Bildes Ei auf diejenigen Sätze, welche im vorigen Capitel bewiesen worden.

[illegible] Hat man mehr als zwei Linsen, so ist die Sache ebenso zu behandeln, sobald nur bewiesen ist, dass alles Licht, welches auf die Objectivlinse fe auffällt, sich im Bilde C wieder vereinigt. Dieser Annahme stehen jedoch häufig zwei [251] Umstände hindernd entgegen, auf welche wenigstens hingewiesen werden möge.

[illegible] Von einem gegebenen Punkte a des Gegenstandes aus fallen, wie man sieht, die Strahlen durch den Strahlenkegel fae auf die Oberfläche oder die Oeffnung der Objectivlinse fe, sodann vereinigen sie sich durch den zweiten Kegel fbe wieder im Punkte b und gehen schliesslich in derselben Richtung fortschreitend später wieder auseinander durch den Kegel HbI; die Grundfläche dieses Kegels ist der Kreis $IKHL$ in der verlängerten Ebene der Linse EF. Nun wird aber die Oberfläche der Linse bloss durch den Kreis $EKFL$ gebildet, und hieraus folgt leicht, dass die Strahlen, welche vom Punkte a aus auf die Linse fe auffallen, einerseits nicht alle auf die Oberfläche der Linse FE gelangen, andererseits sich nicht auf die gesammte Oberfläche derselben ausbreiten. Denn diejenigen Strahlen, welche auf das sichelförmige Stück $KELF$ auffallen, gelangen nicht in das Bild Cc; andererseits gelangen vom Punkte b aus auf das gleichfalls sichelförmige Stück $KELI$ der Linse überhaupt keine Strahlen. Hierdurch ist klar, dass die Helligkeit des Punktes c nur von solchen Strahlen herrührt, welche in den linsenförmigen Raum $KFLI$ eintreten.

[illegible]1. Man ziehe die Geraden Ebi und Fbh und beschreibe mit den Durchmessern fe und hi die Kreise f[illegible]k und $ilhk$, so werden diese den Kreisen $HLIK$ und $FKEL$ entsprechen und denselben proportional sein, und die Strahlen, welche in den Raum $KFLI$ einfallen, sind dieselben wie die, welche in den entsprechenden Raum der Objectivlinse $ifkh$ auffielen. *Diese Menge muss man also durch den Inhalt des Raumes c dividiren, um die Helligkeit des Punktes c zu finden.*

[illegible]2. Nimmt man den Gegenstand als unendlich entfernt an, so verhält sich diese Menge zu derjenigen Strahlenmenge, welche auf die ganze Oberfläche der Linse auffällt, wie der Inhalt des Flächenstückes $ifkh$ [252] *zum Inhalt der ganzen Oeffnung $ifke$; und in demselben Verhältniss steht auch die H*[illegible]*I*[illegible]*keit in c.*

[illegible]. Gehen Strahlen von einem Punkte A aus, der sich auf

der Axe befindet, so treten zwar ähnliche Strahlenkegel auf; jedoch ist in diesem Fall $flek$ die erste Grundfläche, und diese ist der Oberfläche der Linse fe gleich und mit ihr concentrisch, während die zweite Grundfläche dem Kreise $HLIK$ gleich und mit der Linse FE concentrisch ist. *So lange also der Flächeninhalt des letzteren Kreises nicht grösser als derjenige der Linse ist, werden alle Strahlen, welche vom Punkte A aus auf die Objectivlinse fe auffallen, auch in das Bild C des Punktes gelangen, und die Helligkeit desselben wird also ihr Maximum erreichen.* Dasselbe wird stattfinden, wenn der Kreis $HLIK$ ganz in die Oberfläche der Linse FE hineinfällt.

604. Sobald dagegen der Kreis HI grösser ist, als die Oberfläche der Linse FE, und wenn er mit ihr concentrisch ist, so wird die Wirkung dieselbe sein, als ob die Oeffnung der Objectivlinse fe so weit verkleinert würde, dass $HI = FE$ wird. Man nehme an, Cc sei der Gegenstand, so wird Aa sein Bild sein, und da die Fläche $ilhk$ grösser ist als die Oberfläche der Linse fe, so folgt, dass die Oeffnung der Objectivlinse $FE = HLIK$ sein darf, wenn der Punkt A dieselbe Beleuchtung erhalten soll, welche er bei unverändert bleibender Oeffnung FE erhalten hat.

605. In derselben Weise bestimmt sich die Strahlenmenge, welche in einen gegebenen Punkt des Bildes dann eintritt, wenn mehr als zwei Linsen dazwischen liegen.

606. Es seien, um das Gesagte durch ein Beispiel zu erläutern, FE und fe zwei Linsen, AC ihre gemeinsame Axe,

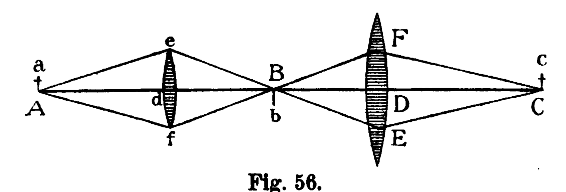


Fig. 56.

C der Gegenstand, B das erste, A das zweite Bild; man suche die centrale Helligkeit des letzteren. Hierzu sei [283]

die Brennweite der Linse FE . . . $= \varphi$
» » » » fe . . . $= f$
» Entfernung CD des Gegenstandes $= \delta$
» Distanz dD der Linsen. . . . $= \beta$,

dann ist nach den Sätzen der Dioptrik

$$DB = \frac{\delta\varphi}{\delta - \varphi},$$

woraus

$$Bd = \frac{\beta(\delta - \varphi) - \delta\varphi}{\delta - \varphi},$$

$$Ad = \frac{Bd \cdot f}{Bd - f} = \frac{f\beta(\delta - \varphi) - f\varphi\delta}{(\beta - f)(\delta - \varphi) - \delta\varphi}.$$

607. Es seien nun CF und CE zwei solche Strahlen, welche nach der Brechung durch die Linse FE auf den Rand der Linse ef treffen; dann ist die Menge der Strahlen, welche das Bild A beleuchtet, offenbar enthalten im Kegel FCE. Bezeichnet man also DF mit a, de mit b, so wird

$$b : a = dB : BD = [\beta(\delta - \varphi) - \delta\varphi] : \delta\varphi .$$

Durch diese Gleichung bestimmt sich also die Oeffnung der einen Linse durch den Inhalt der anderen.

608. Sucht man jedoch die Beleuchtung im Centrum, so denke man sich in Cc ein unendlich kleines Flächenstück, dessen Halbmesser $= 1$ und dessen Inhalt $= \pi$ sei. Dann wird

der Inhalt des ersten Bildes $Bb = \dfrac{\pi DB^2}{DC^2} = \dfrac{\pi\varphi^2}{(\delta - \varphi)^2}$,

der Inhalt des zweiten Bildes $Aa = \dfrac{\pi DB^2 \cdot Ad^2}{DC^2 \cdot dB^2}$,

$$\text{oder} = \frac{\pi\varphi^2 f^2}{[(\beta - f)(\delta - \varphi) - \delta\varphi]^2}.$$

[**284**] 609. Bezeichnet man ferner die Menge der innerhalb FE einfallenden Strahlen mit q, die Helligkeit des Bildes Aa mit η, so wird (222)

$$q = \frac{\pi^2 FD^2}{FC^2} = \frac{\pi^2 a^2}{a^2 + \delta^2},$$

woraus also

$$\eta = \frac{\pi a^2 [(\beta - f)(\delta - \varphi) - \delta\varphi]^2}{(a^2 + \delta^2)\varphi^2 f^2},$$

oder

$$\eta = \frac{\pi a^2 [(\beta - f - \varphi)\delta - (\beta - f)\varphi]^2}{(a^2 + \delta^2)\varphi^2 f^2}.$$

610. Ist die Entfernung des Gegenstandes unendlich, so geht die Formel in die folgende über:

$$\eta = \frac{\pi a^2 (\beta - f - \varphi)^2}{\varphi^2 f^2}.$$

Dieselbe soll durch zwei Beispiele erläutert werden.

611. Erstes Beispiel. Sei FE die Objectivlinse, fe die Ocularlinse eines astronomischen Fernrohrs, welches in einem dunklen Zimmer stehe und das Bild der Sonne auffangen möge; man suche die centrale Helligkeit. Hierbei setze man die Brennweite der Objectivlinse $= 6' = 72''$, die der Ocularlinse $= \frac{3}{2}''$, den Halbmesser FD der Oeffnung $= \frac{3}{2}''$; dann wird

$$\varphi = 72''$$
$$f = \tfrac{3}{2}$$
$$a = \tfrac{3}{2}$$

Fängt man nun das Bild in einer Entfernung $= 2' = 24''$ auf, so wird $Ad = 24''$, und wegen

$$dB = \frac{Ad \cdot f}{Ad - f}$$

[285] wird also

$$dB = \frac{24 \cdot \frac{3}{2}}{24 - \frac{3}{2}} = \tfrac{8}{5}''.$$

Wegen

$$BD = \varphi = 72''$$

wird daher

$$dD = \beta = 72 + \tfrac{8}{5}$$
$$\beta - f - \varphi = 72 + \tfrac{8}{5} - \tfrac{3}{2} - 72 = \tfrac{1}{10}''$$

und mithin

$$\eta = \frac{\pi a^2 (\beta - f - \varphi)^2}{\varphi^2 f^2} = \pi \frac{9}{4} \frac{1}{100} \frac{1}{72^2} \frac{4}{9},$$

oder

$$\eta = \frac{\pi}{518400} = 0.000001929\,\pi.$$

Die directe Beleuchtung ist aber $= \pi \sin^2 \frac{1}{4}^{\circ} = 0.000021662\,\pi$. In diesem Fall ist also ein Blatt, auf welches die Sonnenstrahlen direct auffallen, elfmal so hell wie das Bild, welches mit Hilfe dieses Fernrohrs im dunklen Zimmer erzeugt wurde. Die Helligkeit des ersten Bildes Bb wird $= \pi\, \mathrm{tg}^2 FBD$ (500, 501) oder